まえがき

複素数は 2 次方程式が常に解をもつように 2 乗して負になる仮想的な数として導入された．これは，1 次方程式が常に解をもつように有理数が導入されたことに対応している．一方で，一般の複素数係数の n 次方程式は n 個の複素数の解をもつ（代数学の基本定理）．したがって，代数方程式の世界では複素数だけで話が閉じていて，それ以上に新たな数を導入する必要はない．次に複素数の関数（複素関数）について考える．複素関数は，実数の 2 つの 2 変数関数と対応づけることができるが，微分演算を可能にするためには，その 2 つの実関数に大きな制限をつける必要がある．しかし，そのような制限をつけることにより，たとえば 1 回微分できる関数は何回でも微分できるといった美しい性質をもつことになる．このように複素数や複素関数は数学的に非常に興味深い性質をもっているが，実はそれだけではなく，たとえば微分可能な複素関数は（縮まない流体の）2 次元渦なし流れそのものであるし，ある条件の下では電磁場とも完全な対応もつく．この意味で，複素数や複素関数は実世界でも決して架空のものではない．

さて，現在の大学の理工系での数学のカリキュラムでは，まず線形代数と微分積分学を学び，その後，微分方程式やフーリエ解析に進むのが一般的である．複素関数論の講義は，そのあと，あるいはそれと並行して大学の 2 年次または 3 年次に行われるのが普通である．一方で情報科学やコンピュータの進展により応用数学で学ぶべき内容が増えて，複素関数論のために時間を割くことが難しくなってきたことも確かである．しかし，複素関数論は数学でもっとも完成された分野のひとつであって，数学の各分野に応用されるとともに，数学の美しさを知るのにも適当な題材である．そのため著者は数学の中で複素関数論は非常に教育的であると考える．さらに上述のように，理工学への応用も広範，多岐にわたる．本書の目的はそういった複素関数論の一端を，応用を中心として，なるべくわかりやすく読者に伝えることにある．

本書は全体として 3 部構成にした．第 I 部は基礎篇であり，複素関数論において最低これだけのはことは知っておいて欲しいというエッセンスを枝葉を取り去って記述した．すでに複素関数論を学んだ読者は読み飛ばしてよい部分であるが，そういった読者にも知識の整理に役立つようにした．第 II 部は発展篇で，複素関数論が近似計算を含め，数学の多くの分野において利用されることを示すために書いた．第 III 部は応用篇であり，複素関数論の理工学，特に弾性論や流体力学などへの応用を主眼とした部分である．

以下，本書の内容をざっと紹介する．

第 I 部（基礎篇）の第 1 章では，まず複素数の四則演算や複素数の数列，級数を述べたあと，複素関数を導入して，微分について詳しく調べる．そして微分可能な複素関数（正則関数）として，初等関数と総称される有理関数，指数関数，三角関数，対数関数などを導入する．第 2 章では正則関数の積分について述べる．中心的な話題はコーシーの積分定理であるが，その拡張であるコーシー

の積分公式も以降の議論で本質的に重要な役割を果たす．第 3 章は正則関数をべき級数で表すことが主題である．実関数でよく知られたテイラー展開を複素関数に拡張するが，特異点（関数が微分できない点）まわりの展開であるローラン展開についても詳しく述べ，さらにローラン展開により特異点を分類する．第 4 章は少し毛色の変わった話題であるが，複素数の効用のひとつとして，複素数を用いることによって幾何学や力学における種々の公式が簡潔な形に記述できることを示す．

第 II 部（発展編）の第 5 章では正則関数による写像（等角写像）について一般的な議論をするとともに，具体的に初等関数による写像を調べる．さらに等角写像の応用としてラプラス方程式の境界値問題を，複雑な領域を簡単な領域に写像することにより解く．第 6 章では実関数の定積分や級数の和を求める場合に複素積分が役立つことを示す．複素積分の方が複雑に見えるが，実は留数定理によって複素積分の値は簡単に求まる．また，留数定理の応用として偏角の原理についても述べる．偏角の原理を用いると冒頭で述べた代数学の基本定理が証明できる．第 7 章は調和関数（ラプラス方程式の解）に関する記述である．正則関数の実数部と虚数部は調和関数であることが簡単に示せるため，たとえば正則関数が何回でも微分できるといった美しい性質は調和関数にも引き継がれる．第 8 章では複素関数論を近似計算に応用する．具体的には非線形方程式の解を求めるニュートン法，積分の近似式を求める鞍部点法，絶対値の大きい点での関数値を求めるのに役立つ漸近展開，コーシーの積分公式の数値積分への応用について述べる．

第 III 部（応用篇）の第 9 章では関数論が 2 次元弾性論に応用でき，見通しの良いものにできることを示す．第 10 章は関数論の流体力学への応用であり，正則関数が縮まない流体（液体など）の 2 次元渦なし流れに完全に対応することを示す．流れを思い浮かべることにより正則関数を視覚化することができるが，逆に流れの問題を解いたり，流れのもつ重要な性質を調べるために複素関数論が役立つ．第 11 章は第 5 章の内容を発展させたもので，特に多角形領域を円や上半平面に写像するシュワルツ・クリストッフェル変換およびその応用について詳しく述べる．また，流体力学の発想が等角写像の関数を求めるのに役立つことも示す．第 12 章では楕円関数について初歩的な部分を述べた．実数の世界で周期関数といった場合には一方向の周期しかもたないが，複素関数は実数と虚数のいわば 2 方向をもつため，両方向に周期をもつ 2 重周期関数（楕円関数）が存在する．2 重周期性は複素関数として特有のものであり，興味深い性質をもつ．なお，付録 A ではラプラス変換，逆変換そしてその制御理論への応用について簡単にふれている．付録 B ではコーシーの積分定理の証明において導関数の連続性を仮定しないグルサによる証明を示す．付録 C では定常な電磁場と複素関数論との関係について述べる．付録 D では複素数を用いた流れのシミュレーション手法である渦糸近似法について原理を述べた．

本書によって，複素関数論の美しさや，広範な応用の一端にふれ，さらに高度な内容にすすまれるきっかけとなれば著者にとって望外の幸せである．なお，十分に注意して執筆したが，著者の思い違いや不備があることを恐れている．読者諸賢のご叱正をお待ちしたい．

2016 年 8 月

河村 哲也

目　次