まえがき

本書では，ハミルトン力学系の基礎から始め，可積分性やその摂動である近可積分系の理論について述べる．

力学系とは，時間発展により状態が変化するシステムの数学的モデルを指す．特に常微分方程式や写像により定まる力学系がよく研究されている．ハミルトン力学系とは，ハミルトンの正準方程式で定まる力学系のことである．ハミルトン力学系は古典力学を定式化する形式として現れたが，古典力学だけでなく測地流や流体力学の渦点系など様々な力学系を含む．

ハミルトン力学系は，十分な数の第一積分（保存量）が存在すれば解は規則的でよく分かり，このときこのハミルトン力学系は可積分系であるという．可積分系を摂動すると一般には非可積分系になる．しかし，摂動が十分小さければ可積分系のときに存在していた規則的な解の多くは摂動系でも存在する．そのことを保証する定理を KAM 定理という．KAM 定理とはコルモゴロフ (Kolmogorov)，アーノルド (Arnold)，モーザー (Moser) により示された定理であり，彼らの頭文字をとってこのように呼ばれている．ハミルトン力学系における 20 世紀最大の結果の 1 つである．KAM 定理は，周期外力付き振り子や太陽系モデルや，平衡点や周期解の安定性の証明に応用されている．また，理論としてもアーノルド拡散，オーブリー–マザー理論など様々な発展があり，近年は弱 KAM 理論も目覚ましく進展している．

本書では具体的な力学のモデルをできるだけ多く取り入れ，多くの応用例に触れられるよう心がけた．特に周期外力付き振り子や制限 3 体問題について微分方程式の導出や解に関する詳細な計算を記述した．そのため，計算が多くなった部分もあるが，読者には具体例を通して様々な理論に対して理解を深め，興味を持っていただければ幸いである．

本書の構成は以下のとおりである．第 1 章では，ラグランジュ形式について概説する．ラグランジアンを用いて，ホロノーム拘束系の運動方程式の導出を振り子などの具体例で述べている．また，多様体上のラグランジュ系の例として測地線の方程式を挙げている．第 2 章では，ハミルトン形式による力学の運動方程式の定式化について述べる．後の章では，ほとんどハミルトン形式で議論を進めていくので，本書の内容の基礎となる部分である．第 3 章では，ポアンカレ写像によりシンプレクティック写像の力学系がハミルトン力学系の離散版であることを述べる．また，具体例として，ビリヤード写像などを挙げる．第 4 章では，ハミルトン力学系の可積分性の定義と，可積分系の解が規則的な振る舞いをするというリウヴィル–アーノルドの定理を紹介する．この定理により可積分系のハミルトニアンでは作用–角変数という変数が導入できる．それにより解は，そのクロネッカー軌道と呼ばれるトーラス上の軌道として理解できる．また，振り子やケプラー問題など具体的な可積分系に対する作用–角変数を導く．第 5 章では，可積分系を摂動した近可積分系は一般に非可積分系になるというポアンカレの定理を紹介する．また，制限 3 体問題を導出し，ポアン

カレの定理を応用することにより制限3体問題は非可積分であることを示す．3体問題が解けないといわれる理由はこの結果による．第6章では，KAM定理を紹介する．可積分系の解であるクロネッカー軌道のうち摂動系で残るものは，振動数ベクトルがディオファントス条件というものを満たすものである．まず，ディオファントスベクトル全体の測度評価も行う．そのディオファントス条件は整数論とも関係がある興味深い条件であり，ディオファントス近似問題との関連についても触れる．KAM定理の証明はコルモゴロフの方法に沿ったものを紹介する．第7章では，KAM定理の応用について述べる．系が近可積分系の場合だけでなく，平衡点の近傍でハミルトニアンをバーコフ標準形で表示することで，平衡点近傍の力学系に対しても応用する．特に，振り子と制限3体問題への応用について詳しく述べる．第8章では，KAM定理に関係する発展的な話題，特にKAMトーラスの崩壊やアーノルド拡散，オーブリー–マザー理論や弱KAM理論などについて触れる．

本書は，大学3年以上または大学院生を念頭において執筆されている．微積分，線形代数，常微分方程式，多様体，微分形式を予備知識として仮定する．複素関数論，ベクトル束，測度論，関数解析，フーリエ解析も必要になる部分があるが，それほど高度なことは使わない．また，解析力学については記載しているので予備知識は必要ないが，高校物理で学ぶ程度の力学の知識があることは想定している．なお，「参考」として書いてある中には，より進んだ内容を含んでいたり，定義を述べずに用いている用語もある．軽く目を通す程度で，適当に読み飛ばしていただきたい．

本書は，京都大学大学院情報学研究科と大阪大学大学院基礎工学研究科で行った大学院生向けの講義，および慶應義塾大学での集中講義で用いたノートがもとになっている．その際には，学生には多く質問をしてもらいそれにより改善することができた部分が多い．また，多羅間大輔氏には剛体の運動方程式を導出するいくつかの方法について紹介していただいた．本書では剛体の運動方程式の導出について詳しくは触れることができなかったが，注釈や文献を付け加えさせていただいた．曽我幸平氏には全体に関してコメントを頂き，特に弱KAM理論について不備を修正することができた．伊藤秀一先生，矢ヶ崎一幸先生には誤植や分かりにくい点，説明不足の点などを数多く指摘していただき，改善することができた．最後に，「数理科学」編集部の大溝良平氏には，執筆をご依頼頂いたときから完成に至るまで様々な点でお世話になった．同じく「数理科学」編集部の平勢耕介氏には研究室まで足を運んでいただき，原稿に関する細かな相談に乗っていただいた．以上の方々にお礼を申し上げたい．

2016年10月

柴山 允瑠

目　次