

SGC ライブラリ- 23

微分幾何講義

一般理論と現代物理への応用

二木 昭人 著

サイエンス社

まえがき

本書は、1 学期程度の講義の多様体論の知識を持つ読者を対象にして、微分幾何学の一般論を解説する前半部分（第 1 章，第 2 章）と，その応用としてスピノ多様体，ディラック作用素，サイバーク・ウィッテン不変量を解説する後半部分（第 3 章，第 4 章）からなる．前半部分は東京工業大学理学部における微分幾何学の一般論についての講義ノート，後半部分は 1995 年に研究室の大学院生を相手に講義したノートと 2000 年 2 月の八王子大学セミナーハウスにおける講義ノートをそれぞれ加筆，修正したものである．

前半の目的は微分幾何学の解説であるが，特に特性類を含む接続の一般論，測地線論の基本事項，ケーラー幾何学などの複素微分幾何学に関する基本事項，テンソル解析の技法の 4 つを解説することとに重点をおいた．後半部分は，先に出版された著者による翻訳「J. モーガン著：サイバーク・ウィッテン理論とトポロジー（培風館，1998）」を執筆しながらもう少し違う書き方もありうると感じた経験をもとに，著者なりのサイバーク・ウィッテン不変量の解説をしたつもりである．サイバーク・ウィッテン不変量を定義する方法は， $SU(2)$ インスタントを用いたDonaldson 多項式不変量，フレアーホモロジー，グロモフ・ウィッテン不変量，量子コホモロジーなどの定義に共通するものがあり，一つを理解すれば他の定義の基本的なものの考え方は理解される．その意味で，本書において特にサイバーク・ウィッテン不変量のみを学習するというのではなく，これらのゲージ理論的不変量の定義の典型例としてサイバーク・ウィッテン不変量を取り上げるものであると考えていただきたい．以下，

- A. 前半部分で扱われるテーマが幾何学全般の中に占める位置を述べる；
- B. 後半部分で解説したいゲージ理論的不変量の構成方法の概略を述べる；

の 2 つを目標とする．

A. 多様体論を学び始めたときに最初に出会う大きな定理はド・ラームの定理であろう．この定理はド・ラームコホモロジー群が定数層 $\mathbb{R}$ 係数のチェックコホモロジーと同型であることを主張する．ここに， p 次微分形式全体 Ω^p に作用する外微分作用素 $d : \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1}$ から作られる複体をド・ラーム複体といい，そのコホモロジーがド・ラームコホモロジー群である．さらに，多様体 M がコンパクト向き付け可能ならばド・ラームコホモロジー群は調和微分形式の全体とも同型である（ホッジ理論）．この場合，調和形式の全体は有限次元であるからド・ラームコホモロジー群 $H^p = Z^p/B^p$ は有限次元である．ここで Z^p は p 次閉形式の全体であり， B^p は p 次完全形式の全体であり，どちらも無限次元である．しかし，商空間 Z^p/B^p は有限次元になるのである．後で述べるゲージ理論においてモデュライ空間が有限次元になるのも同じような状況である．

幾何学の色々な理論の一つの出発点となるものの中にガウス・ボンネの定理がある． $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 M に対し，局所的に 2 つの接ベクトル場 e_1, e_2 を正規直交基底であるように取る．次に τ^1, τ^2 を e_1, e_2 の双対基底となる 1 次微分形式と取る．

$$d\tau^i + \theta_1^i \wedge \tau^1 + \theta_2^i \wedge \tau^2 = 0$$

により θ_j^i を定義し，接続形式という（命題 2.2.3 参照）．行列 $\theta = (\theta_j^i)$ は歪対称行列に値を持つ 1 次微分形式である．

$$d\theta_2^1 = \kappa \theta^1 \wedge \theta^2$$

により κ を定義し，ガウス曲率という． κ は e_1, e_2 の取り方によらない．ガウス・ボンネの定理の主張は

$$\frac{1}{4\pi} \int_M \kappa \theta^1 \wedge \theta^2 = \chi(M)$$

ということである．ここに $\chi(M)$ は M のオイラー数，すなわち 3 角形分割したときの，頂点の個数 − 辺の個数 + 面の個数である．この式は M の与えられた 3 角形分割に対し証明され，従って特にオイラー数が 3 角形分割の取り方によらないこと，また左辺の積分が M の形に（すなわち $\mathbb{R}^3$ への埋め込み方）によらないことが同時にわかる．特に，2 次微分形式 $e := \frac{1}{4\pi} \kappa \theta^1 \wedge \theta^2$ は M の $\mathbb{R}^3$ への埋め込みによらない 2 次元ド・ラームコホモロジー類を定めることがわかる．この類を M のオイラー類という．この状況を一般化すると次のようになる．コンパクト向き付け可能多様体 M 上の複素ベクトル束 $E \rightarrow M$ が与えられるとチャーン類と呼ばれる偶数次コホモロジー類が標準的に定まる．実 2 次元向き付け可能多様体は 1 次元複素多様体であり，特に接ベクトル束は 1 次元複素ベクトル束である．その第 1 チャーン類がオイラー類である．実ベクトル束に対してはポントリャーギン類と呼ばれる $4k$ 次元コホモロジー類が定まる．このようなコホモロジー類を総称して特性類という．ベクトル束から定まる特性類は実は同伴主束から定まることがわかり，一般にコンパクトリー群 G を与えたとき，主 G 束の分類空間 B_G のコホモロジー環の元を分類写像で引き戻したコホモロジーが特性類であるということができる．このような元は主束の接続とその曲率形式を用いて表すことができる．以上の理論はチャーン・ヴェイユ理論と呼ばれる．

ド・ラームの定理とチャーン・ヴェイユ理論を併せると次のことがいえる．ド・ラーム複体のオイラー・ポアンカレ指標はオイラー類を積分した値に等しい．これを一般化したものがアティヤ・シンガー指数定理であり，この定理は次のように言い表される：解析的指数と位相的指数は等しい．解析的指数とはフレドホルム作用素としての指数ということであり，位相的指数とは特性類の積分で表される指数という意味である（厳密には位相的指数は K 理論の言葉で表現される）．ド・ラーム複体以外では，ドルボー複体に応用したリーマン・ロッホの定理， $d + d^* : \Omega^{\text{even}} \rightarrow \Omega^{\text{odd}}$ に適用したヒルツェブルフの符号定理，スピノ多様体のディラック作用素に適用した定理（ディラック作用素の指数は $\hat{A}$ 種数に等しい）などがアティヤ・シンガー指数定理の応用例である．アティヤ・シンガー指数定理は本書の程度を越えるので，本書では解説せず，特別な場合のみに結果だけを用いる．例えば [18]，

[28]などを参照されたい。

上の例にあげた複体は楕円型複体と呼ばれるものである。このような複体のコホモロジーは適当な曲率の条件のもとで0になることがわかる。例えばドルボー複体のコホモロジー群は調和微分形式のなすベクトル空間と同型である。一方ある種の調和微分形式は適当な曲率の条件のもとでは0しかないことがわかり、従ってコホモロジー群の一部は適当な曲率の条件のもとに0となる。小平の消滅定理はこのような議論による結果である。また、ディラック作用素の核の元は調和スピノルと呼ばれるが、多様体が正のスカラー曲率を持てば調和スピノルは0しか存在しないことがわかり、従って多様体が正のスカラー曲率を持てば $\hat{A}$ 種数は0になることがわかる。このような証明をする方法はボホナーテクニックとか、ボホナー・ヴァイツェンバック公式による方法などと呼ばれるものであるが、これを実行するための基礎がテンソル解析である。また、多様体上の非線形偏微分方程式におけるア・プリオリ評価においてもテンソル解析は必要であり、これに習熟することは大域解析学を学習・研究する上で有益である。

さて、アティヤ・シンガー指数定理のように解析的な手法を用いて多様体の大域的性質を調べる数学を大域解析学という。大域解析学の典型的かつ古典的な例は測地線論であろう。本書では多様体上で微分方程式を解いて多様体の大域的性質を調べる典型として測地線論から得られる結果、例えばSyngeの定理などを紹介する。測地線を高次元化したものに調和写像がある。測地線は1次元多様体からの写像であるのに対し、調和写像は一般次元多様体からの写像である。このため、測地線のみたす微分方程式が常微分方程式であるのに対し、調和写像のみたす微分方程式は偏微分方程式でありしかも非線形であるため、調和写像の存在が証明できる場合は高次元においてはまれである。しかし、幸運にも存在が示される場合は多様体の研究の強力な道具となる。この他、極小曲面、その高次元化である極小部分多様体、アインシュタイン計量、もっと一般に平均曲率一定曲面、スカラー曲率一定計量なども有用である。これらはどちらかというと直接的に偏微分方程式の解を多様体の研究に使うものであるが、次に説明するゲージ理論的不変量を構成する方法は間接的に微分方程式を用いる。

B. $F : M \rightarrow N$ を多様体 M, N の間の滑らかな写像とする。更に M, N にはリー群 G が作用し、 F は G 同変であるとする： $F(gx) = gF(x)$ 。 $o \in N$ を G の不動点とし、 $F^{-1}(o)/G$ をモデュライ空間と呼ぶことにする。 $1 \in G$, $x \in F^{-1}(o)$, $o \in N$ における各接空間の間の自然な写像の列

$$0 \rightarrow T_1G \rightarrow T_xM \rightarrow T_oN \rightarrow 0$$

は複体をなす。これは単に G のリー環の元 ξ が自然に定める M のベクトル場を同じ ξ で表すとき、

$$dF_x(\xi) = 0$$

であることを言っているに他ならない。この複体のコホモロジーを H^i , $i = 0, 1, 2$, により表そう。陰関数定理により dF_x が全射なら $F^{-1}(o)$ は滑らかな部分多様体である。 dF_x

が全射とは $H^2 = 0$ ということである．更に $\mathcal{G}$ の作用が自由なら商空間 $F^{-1}(o)/\mathcal{G}$ は再び滑らかな多様体になる． $\mathcal{G}$ の作用が自由ということは $H^0 = 0$ ということである．この条件のもとに H^1 がモデュライ空間の接空間であり，その次元は $\dim H^1 = -\chi$ となる．ただし χ は複体のオイラー・ポアンカレ標数である．ゲージ理論で現れる状況は M , N は無限次元多様体（しかるべき函数空間）であり， F は非線形偏微分方程式（例えば接続に関する自己双対方程式であったり，サイバーク・ウィッテン方程式であったり）であり，そして複体は上述のような楕円型複体である．よってアティヤ・シンガー指数定理により，モデュライ空間の次元は特性類を用いて表される．さて，實際上 $H^0 = H^2 = 0$ とは限らないので非線形偏微分方程式を摂動することにより， $H^0 = H^2 = 0$ となるようにしたい．簡単のため $H^0 = 0$ にはできると仮定してこの点は気にしないことにしよう． $H^2 = 0$ とするために（無限次元）多様体 Δ でパラメーター付けられた摂動偏微分方程式の族 $\{F_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ を考える．ただし $F_0 = F$ とする．

$$\tilde{F}: M \times \Delta \rightarrow N$$

を $\tilde{F}(x, \delta) = F_\delta(x)$ により定義したとき， $\tilde{F}^{-1}(o) =: \mathcal{M}_\Delta$ は滑らかな（無限次元）多様体になり， $\pi(x, \delta) = \delta$ により定義される写像

$$\pi: \mathcal{M}_\Delta \rightarrow \Delta$$

はフレドホルム写像になったとしよう．実際上の応用ではいつもこのようになるのでこのようなものであると安心してよい．またフレドホルム写像とはその微分がフレドホルム作用素（核も余核も有限次元ということ）になるもののことである．有限次元の可微分写像と同様にフレドホルム写像に対してもサードの定理が成り立つことが S. スメイルによって証明されている．よって o が正則値でなくても o の十分近傍に正則値が存在する．そして正則値 δ の逆像 $\pi^{-1}(\delta)$ は有限次元の滑らかな多様体になる．2つの相異なる正則値 δ_1 , δ_2 をとっても $\pi^{-1}(\delta_1)$ と $\pi^{-1}(\delta_2)$ はボルダント，すなわち 1 次元高い多様体 W が存在して $\partial W = \pi^{-1}(\delta_1) - \pi^{-1}(\delta_2)$ となることがわかる．ここに $-$ と書いたのは向きを考慮してである．したがってこのボルディズム類を多様体の大域的性質の研究に用いようというのが，ゲージ理論的不変量の考え方である．例えば本書で取り上げるサイバーク・ウィッテン方程式を用いると可微分構造の違いを見分ける不変量が得られる．ここで言いたいことは他のゲージ理論的不変量の定義においても同じパターンで議論が進むので，一つを学べば他も同様であるということである．

最後に，サイバーク・ウィッテン方程式のトポロジーへの応用が発表された 1994 年に，出張先のパークレー・MSRI でウィッテンやクロンハイマー・ムローカの論文をネットワークから取り出してくれた牛腸徹氏にこの場を借りてお礼を申し上げたい．また挿絵を書いていただくなどお世話になったサイエンス社の平勢耕介氏に感謝したい．

2002 年 11 月

二木 昭人

目 次

第 1 章 多様体の基本事項	1
1.1 線形代数からの基本事項	1
1.2 多様体論からの基本事項	8
1.3 複素多様体	15
1.4 層	18
第 2 章 接続の理論およびリーマン幾何	23
2.1 ベクトル束の接続	23
2.2 リーマン接続, 正則ベクトル束の標準接続, ケーラー多様体	29
2.2.1 リーマン多様体	29
2.2.2 部分多様体の幾何学	35
2.2.3 正則ベクトル束の標準接続	39
2.2.4 ケーラー多様体の接続	48
2.3 平行移動と主束の接続	51
2.4 特性類	65
2.5 リーマン幾何の基本事項	73
2.5.1 測地線と正規座標	73
2.5.2 調和積分論とボホナー・ヴァイツェンベック公式	84
2.5.3 ケーラー多様体の基本事項	94
2.5.4 リーマン多様体のホロノミー群の分類	107
第 3 章 $Spin$ 構造とディラック作用素	114
3.1 $Spin$ 構造と $Spin^c$ 構造	114
3.2 ディラック作用素	127
第 4 章 サイバーグ・ウィッテン方程式	138
4.1 接続の空間	138
4.2 サイバーグ・ウィッテン理論	141
4.3 Vanishing theorem とコンパクト性	163
4.4 ケーラー曲面の場合	167
参考文献	177
索引	179

第 1 章

多様体の基本事項

この章では線形代数および多様体論からの基本事項を復習する．線形代数について微分幾何で慣用的に用いられるノータイションは，テンソル解析においても主束の接続のゲージ変換や曲率の式においても大切であるので微分幾何をはじめて学ぶ読者は第 1 節も目を通して頂きたい．また，この本で用いられる記号を設定するという目的も同時に兼ねている．複素多様体，層についても説明する．

1.1 線形代数からの基本事項

V を n 次元実ベクトル空間とする． V の双対空間 V^* とは V から 1 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}$ への線形写像全体のなすベクトル空間のことである：

$$V^* = \{f: V \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ は線形} \}.$$

i) V^* は実ベクトル空間になる．

証明 $f, g \in V^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対し $\alpha f + \beta g \in V^*$ を

$$(\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V$$

により定義すれば V^* には和とスカラー倍が定まり，これに関し V^* はベクトル空間の公理をみたす． □

ii) V の次元を n とし， $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ を V の基底とする． V の任意のベクトル $\mathbf{x}$ は

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + \dots + x^n \mathbf{e}_n$$

という形に実数 $x^1, \dots, x^n$ を用いて一意的に表される．ここで添字 i を右上にのせて x^i と書いていることに注意しよう．これは x の i 乗という意味ではな

第 2 章

接続の理論およびリーマン幾何

本章では接続の一般論を展開する．まず C^∞ 級ベクトル束の場合の線形接続について述べ，その特別な場合としてリーマン多様体のレビ・チビタ接続，正則ベクトル束の標準接続，ケーラー多様体の接続があることを説明する．その後，これらの一般化として主束の接続があることを説明し，特性類の理論（チャーン・ヴェイユ理論，チャーン・サイモンズ理論）について述べる．

さらに 2.5 節においては測地線，ボホナーテクニックによるテンソル計算，調和積分論，ホロノミーなどのリーマン幾何における基本事項を解説する．

本章以降はアインシュタインの規約を用い，上下に同じ添字がついていれば Σ 記号が無くてもその添字に関し和を取っているものとする．

2.1 ベクトル束の接続

M を n 次元 C^∞ 級多様体， $\pi: E \rightarrow M$ を M 上の実または複素ベクトル束とする．切断全体 $C^\infty(M, E)$ は実または複素ベクトル空間になる． E が複素ベクトル束のときは TM も複素化しておくことにする． TM の複素化 $TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ とは各ファイバーを複素化したベクトル束のことである．接ベクトル束の複素化とは実際上複素数 X^i を係数とする接ベクトル $X^i \partial / \partial x^i$ を考えることにすることに他ならない．記号は複素化したものも TM をしばしば混用することにする．

定義 2.1.1 線形写像 $\nabla: C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, E \otimes T^*M)$ が E の線形接続であるとは，任意の関数 $f \in C^\infty(M)$ と切断 $s \in C^\infty(M, E)$ に対し

$$\nabla(fs) = f\nabla s + s \otimes df$$

をみたすときをいう．このような線形接続 ∇ が与えられたとき， T^*M と TM の縮約から定まる写像

第 3 章

Spin 構造とディラック作用素

本章では *Spin* 多様体とディラック作用素，リヒネロウィッツ公式などについて述べる． $Spin(n)$ は $SO(n)$ の 2 重被覆群である． $SO(n)$ 表現から来ない $Spin(n)$ の既約表現を $Spin(n)$ 表現という．*Spin* 表現はクリフォード代数を用いて記述される．第 4 章においては $n = 4$ の場合のみを扱うので，一般次元のクリフォード代数の基本事項はスケッチのみにとどめる．

3.1 *Spin* 構造と *Spin^c* 構造

まず 2 つの例から始めよう．

例 3.1.1 $SU(2) \cong S^3$.

証明 ユニタリ群 $U(2)$ の元 A は ${}^t\overline{A}A = E$ となる 2 行 2 列の複素行列である．このような行列は $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ なる複素数 α, β を用いて

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta}e^{i\theta} \\ \beta & \overline{\alpha}e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

の形に書ける．よって特殊ユニタリ群 $SU(2)$ は

$$\begin{aligned} SU(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \mid |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} \cong S^3 \end{aligned}$$

となる．

□

例 3.1.2 2 重被覆 $p: SU(2) \rightarrow SO(3)$ が存在する．特に， $SO(3)$ は 3 次元

第 4 章

サイバーグ・ウィッテン方程式

本章ではサイバーグ・ウィッテン方程式について解説する．まず，微分構造の不変量であるサイバーグ・ウィッテン不変量の構成方法について述べる．次にウィッテンの原論文にある議論を用いて， $K3$ 曲面の $Spin^c$ 構造で 0 でないサイバーグ・ウィッテン不変量を持つものは自明な $Spin^c$ 構造のみであることを証明する．

4.1 接続の空間

接続については第 2 章で詳しく論じたが，そこでは多くの場合一つ一つの接続について論じた．しかし，反自己双対ヤン・ミルズ (Yang-Mills) 接続の理論 (ドナルドソン (Donaldson) 理論) やサイバーグ・ウィッテン理論においては接続全体の空間を考える．例えばドナルドソン理論においては接続を未知関数とする反自己双対方程式を考える．この方程式の解が反自己双対接続であり，ヤン・ミルズ接続の特別な場合になっている．このような解の全体は接続全体の空間 $\mathcal{A}$ (無限次元) の部分多様体 $\mathcal{S}$ をなす (やはり無限次元)．次にゲージ群 G はやはり無限次元であるが，反自己双対方程式はゲージ不変であり，解空間 $\mathcal{S}$ は G の作用で保たれる．軌道空間 $\mathcal{S}/G$ は有限次元になる．反自己双対方程式はリーマン計量に依存するが， $\mathcal{S}/G$ の $\mathcal{A}/G$ におけるボルディズム類 (大胆に言うとホモロジー類) はリーマン計量の摂動により不変であるから，この類が可微分構造に依存する不変量であるというのがドナルドソン理論のあらましであった．

サイバーグ・ウィッテン方程式においては $Spin^c$ 構造の行列式直線束の接続とスピノル場が未知関数となる．やはり接続全体のなす空間を取り扱う必要があるので，本節でその取り扱いについて述べたい．

X をコンパクト，向き付け可能，連結 4 次元多様体とする．主 G 束 $\pi: P \rightarrow X$

参考文献

- [1] 伊藤光弘/茂木勇, 微分幾何とゲージ理論, 共立出版, 1986.
- [2] T. Aubin, Nonlinear analysis on manifolds, Monge-Ampère equations, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.
- [3] 小平邦彦, 複素多様体論, 岩波講座 基礎数学, 1981.
- [4] S. Kobayashi, Transformation groups in Differential Geometry, Springer-Verlag, 1972.
- [5] 小林昭七, 接続の微分幾何とゲージ理論, 裳華房, 1989.
- [6] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, vol. I (1963), vol. II (1969), Interscience Publishers, New York.
- [7] 酒井隆, リーマン幾何学, 裳華房, 1992.
- [8] D. Joyce, Compact manifolds with special holonomy, Oxford University Press, 2000.
- [9] N. Stenrod, Topology of fibre bundles, Princeton University Press, 1974.
- [10] J. Cheeger and J. Simons, Differential characters and geometric invariants, Lecture Notes in Math., 1167(1985), 50–80, Springer-Verlag, New York-Heidelberg.
- [11] S.S. Chern and J. Simons, Characteristic forms and geometric invariants, Ann. of Math., 99(1974), 48–69.
- [12] S.K. Donaldson and P.B. Kronheimer, Geometry of four manifolds, Clarendon, Oxford, 1990.
- [13] F. ヒルツェブルフ, 代数幾何における位相的方法, 1970, (竹内勝訳), 吉岡書店.
- [14] 深谷賢治, ゲージ理論とトポロジー, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1995.
- [15] 深谷賢治, モノポール方程式とトポロジー, 別冊・数理科学, 現代物理と現代幾何, 2002.
- [16] A. Futaki, Kähler-Einstein manifolds and integral invariants, Lecture Notes in Math., vol.1314(1988), Springer-Verlag, New York-Heidelberg.
- [17] 二木昭人, 基礎講義線形代数学, 培風館, 1999.
- [18] 古田幹雄, 指数定理, 岩波講座現代数学の展開, 岩波書店, 2002.
- [19] 古田幹雄, 数学から見た場の理論 —Donaldson 理論と Seiberg-Witten 理論, 別冊・数理科学, 現代物理と現代幾何, 2002.
- [20] T. Bröcker and T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1985.
- [21] A. Besse, Einstein manifolds, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1987.
- [22] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups, and symmetric spaces, Academic Press, Orland, 1978.
- [23] 松島与三, 多様体入門, 裳華房, 1965.
- [24] J.W. ミルナー/J.D. スタシェフ, 特性類講義, 2001, (佐伯修/佐久間一浩訳), シュプリン

ガー・フェアラーク東京.

(原書 J.W. Milnor and J. D. Stasheff: Characteristic classes, Princeton Univ. Press, 1976).

[25] J.W. モーガン, サイバーグ・ウィッテン理論とトポロジー, 1998, (二木昭人訳), 培風館.

(原書 J.W. Morgan: The Seiberg-Witten equations and applications to the topology of smooth four-manifolds, Princeton Univ. Press, 1996).

[26] 森田茂之, 微分形式の幾何学, 岩波講座現代数学の基礎, 岩波書店, 1996.

[27] H.B. Lawson and M.L. Michelsohn, Spin Geometry, Princeton University Press, 1989.

[28] 吉田朋好, デイラック作用素の指数定理, 共立出版, 1998.

[29] F.G. Warner, Introduction to differentiable manifolds and Lie groups, Springer-Verlag, New York, 1983.

索引

ア

アインシュタイン計量 34
アインシュタインの規約 2
アティヤ・シンガー (Atiyah-Singer) 指数定理 149
アレクサンダー・スパニエ (Alexander-Spanier) コホモロジー群 21
一般型 174
因子 40
ヴァイツェンバック公式 92
ヴェイユ準同型 66
埋め込み 35
エルミート (Hermite) 計量 41, 95
エルミート接続 43
オイラー・ポアンカレ標数 149
オイラー類 72
横断的 155

カ

階数 9
外微分 13
概複素多様体 95
ガウス・ボンネ (Gauss-Bonnet) の定理 44
ガウス曲率 38
壁 147
カラビ・ヤウ計量 105
カラビ・ヤウ多様体 105
カルタン (Cartan) の第 1 構造方程式 31
完全形式 14
完備 80
簡約化 63
簡約可能 104
帰納極限 19
基本 2 次形式 49
基本接続 72
基本ベクトル場 56
既約 109

既約解 143
共変外微分 29, 66
共変微分 24
行列式直線束 124
局所自明化 10
局所自明性 9
局所対称空間 110
局所枠 24
曲率形式 26, 58
曲率テンソル 32
曲率方程式 141
キリング (Killing) ベクトル場 93
茎 18
グリーン (Green) 作用素 88
クリストッフェル (Christoffel) 記号 30
クリフォード (Clifford) 代数 119
クロネッカー (Kronecker) のデルタ 3
形式的次元 153
ゲージ群 140
ゲージ同値 140
ゲージ変換 26, 107
ゲージ変換群 26, 107
ケーラー・アインシュタイン計量 103
ケーラー形式 (Kähler 形式) 49
ケーラー計量 49
ケーラー多様体 49
ケーラー類 49
勾配ベクトル場 89
小平次元 173

サ

サイバーグ・ウィッテン不変量 148
サイバーグ・ウィッテン (Seiberg-Witten) 方程式 141
サイバーグ・ウィッテンモデュライ空間 143
四元数ケーラー多様体 112
四元数表現 118
自己準同型束 26

自己同型束 26
指数 149
指数写像 76
実表現 118
射影 9
主 G 束 53
主表象 149
準層 19
垂直射影 60
垂直分布 54
随伴束 107
水平射影 60
水平である 60
水平分布 54
スカラー曲率 34
スピノル束 125
スライス 159
正規近傍 77
正規座標 77
制限ホロノミー 108
制限ホロノミー群 108
斉次座標 42
正則正規座標 97
正則値 154
正則点 154
正則ベクトル束 15
接空間 10
接束 11
接続 58
接続行列 25
接続形式 25, 58
切断 13, 19
接ベクトル空間 10
接ベクトル束 11
全空間 9
線形接続 23
前層 19
層 18
層 $\mathcal{S}$ に係数を持つコホモロジー群 19
層準同型 18
双対基底 2
双対空間 1
挿入 35

測地線 73
測地的対称変換 110
測地的に完備 80
ソボレフ空間 164
ソボレフの埋め込み定理 164
ソボレフ (Sobolev) ノルム 164

タ

第 1 基本形式 37
第 1 チャーン形式 44, 103
第 1 チャーン (Chern) 類 44, 45
第 1 変分公式 81
第 2 基本形式 37
第 2 構造方程式 31
第 2 変分公式 81
第 i チャーン類 46
第 k 面 19
対称空間 110
体積 85
体積要素 85
楕円型 164
楕円型複体 149
楕円曲面 174
断面曲率 34
チェック (Čech) コホモロジー群 20
チャーン・ヴェイユ理論 66
チャーン・サイモンズ不変量 73
超曲面 37
調和形式 87
直線束 39
底空間 9
ディラック (Dirac) 作用素 127
ディラック方程式 141
テンソル積 5
転入形式 66
ド・ラーム (de Rham) 複体 14
ド・ラーム分解 109
同伴ベクトル束 59
特性類 66
ドルボー (Dolbeault) 複体 17

ナ

二義の特性類 73

ハ

ハイパーケーラー多様体 111
パウリ (Pauli) 行列 137
発散 85
半スピノル束 126
ビアンキ (Bianchi) の恒等式 29, 67
引き戻し 15, 35, 51
非斉次座標 42
非特異因子 39
非特異射影代数多様体 50
微分 35
標準接続 43
標準直線束 39
ファイバー 9
ファイバー積 124
ファイバー束 9
複素化 15
複素多様体 15
複素トーラス 174
複素ベクトル束 10
複素モンジュ・アンペール (Monge-Ampère) 方程式 106
符号数 152
フビニ・ストゥディー (Fubini-Study) 計量 42
部分多様体 35
フレドホルム指数 146
フレドホルム (Fredholm) 写像 146
分布 54
閉形式 14
平行移動 51, 61
閉多様体 14
平坦接続 61
平坦束 61
ベクトル束 9
ベルジェ・サイモンスの分類 109
変換関数 10
包含的 54
豊富 (ample) 104
法ベクトル場 37
ホッジ分解 88
ボット (Bott) 接続 72

ホップ曲面 101
ボホナーの定理 93
ボホナーの方法 93
ホロノミー 61
ホロノミー群 52, 62
ホロノミー束 64
ポントリャーギン (Pontryagin) 形式 71
ポントリャーギン類 71

マ

右不変分布 55
芽 18

ヤ

有効な組 161
誘導計量 36
葉層構造 72
余境界作用素 20
余接空間 10
余接ベクトル束 12
余微分 35
余微分作用素 86

ラ

ライプニッツルール 10
ラブラシアン 87
ラプラス・ベルトラミ (Laplace-Beltrami) 作用素 87
リーマン計量 29
リーマン接続 29
リッチ (Ricci) 曲率 34
リッチ形式 103
リッチテンソル 34
リッチ平坦ケーラー計量 105
リヒネロウィッツ (Lichnerowicz) 公式 131, 133
領域 (chamber) 161
両立する 29
劣調和関数 90
レビ・チビタ (Levi-Civita) 接続 29

ワ

枠束 53

欧字

(p, q) 型ドルボーコホモロジー群 17

$\bar{\partial}$ -調和形式 101

$\bar{\partial}$ -ラプラシアン 100

G 不変多項式 65

Hodge (ホッジ) スター作用素 6

$K3$ 曲面 111, 174

p 次元ド・ラームコホモロジー群 14

p 次交代テンソル 5

p 次線形 5

p 次対称テンソル 5

q コチェイン 20

q 次元ドルボーコホモロジー群 17

q 次テンソル場 13

q 次微分形式 13

q 単体 19

$\mathbb{R}$ -特異コホモロジー群 21

$Spin(n)$ 同変 123

$Spin^c$ 構造 124

$Spin^c$ 多様体 124

$Spin^c$ デイラク作用素 128

$Spin$ 構造 123

$Spin$ 多様体 123

著者略歴

二木 昭人

ふた き あき と

1981 年 東京大学大学院理学系研究科博士課程中退

現 在 東京大学大学院数理科学研究科教授

理学博士

専 門 微分幾何学, 複素幾何学

主要著書

Kähler-Einstein metrics and integral invariants (Springer-Verlag, 1988).

J. モーガン著, サイバーク・ウィッテン理論とトポロジー (翻訳, 培風館, 1998).

基礎講義線形代数 (培風館, 1999).

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ-23

『微分幾何講義 一般理論と現代物理への応用』(電子版)

著 者 二木 昭人

2016 年 4 月 25 日 初版発行 ISBN 978-4-7819-9905-0

この電子書籍は 2003 年 4 月 25 日初版発行の同タイトルを底本としています。

数 理 科 学 編 集 部

発行人 森 平 敏 孝

TEL.(03)5474-8816

FAX.(03)5474-8817

ホームページ <http://www.saiensu.co.jp>

ご意見・ご要望は sk@saiensu.co.jp まで。

発行所 © 株式会社 サイエンス社

TEL.(03)5474-8500 (代表)

〒151-0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1-3-25

本誌の内容を無断で複写複製・転載することは、著作者および出版者の権利を侵害することがありますので、その場合にはあらかじめサイエンス社著作権担当者あて許諾をお求めください。

組版 三美印刷