February 2017 MATHEMATICAL SCIENCES Number 644

特集／無限と数理

無限の世界をみるための数理的思考と発想

廣島 文生

今月号の特集テーマは「無限と数理」である．無限という概念は，数理科学の研究を志すものであれば誰もが心を惹かれる対象ではなかろうか．私自身の専門で，無限大といえば無限次元ヒルベルト空間や紫外発散のくりこみ理論，無限小といえば準古典近似などが即座に思い浮かぶがどれも経験上かなり手強い．ちなみに，無限を表す記号 ∞ は1656年に出版されたウォリス著『無限解析』で初めて使われたらしい．さて，巻頭言を格調高く執筆するにあたり，哲学辞典や数学史辞典などで無限について調べてみた．まずはギリシア時代のお話から．無限という概念は西洋哲学の歴史全体を通じて重要な主題であった．アリストテレスは，無限の概念について初めて本質的な分析を行なった．彼は現実的無限と潜在的無限という区別を導入した．潜在的無限とはその都度の大きさ，多さは常に有限に止まりながら，際限なしに増大し得るもののことである．一方，現実的無限とは無限大として確定的に存在するものである．当時は自然学的対象はすべて潜在的無限であるとし，それ自体が無限であるような現実的無限を否定した．その後，中世にかけて神の概念にのみ現実的無限が使われ，自然学的な対象との差別化を図ったようだ．実際，無限を日本語では「際限が無い」と表し，英語では「infinity=終わりがない」と表すから，これらの表記は潜在的無限を表しているように思える．とはいうものの，私には神と無限がどのように結びつくのかよくわからない．

さて，数学において無限の種類，濃度について議論したのはカントールであった．カントールは今日，素朴集合論と呼ばれるものを1874年に発表している．述語 $P(x)$ を満たす対象 x を読者諸氏お馴染みの $\{x|P(x)\}$ と表した．そしてカントールが集合の概念を公理化し数学の中に，例えば実数の集合のように，現実的無限を導入した．これらは砂田利一氏の解説に述べられている．ちなみに実数の連続性の同値な定義は「デデキントの切断」など少なくとも22個以上あるそうだ．

数論に現れる無限といえば，素数の個数だろうか．その証明はすでにユークリッド『原論』（前300年頃）に記されている．1737年，オイラーは

$$\sum_{n:\text{自然数}} \frac{1}{n^s} = \prod_{p:\text{素数}} (1-p^{-s})^{-1}$$

に気がついた．調和級数の発散 $\sum_n \frac{1}{n} = \infty$ が知られているから $\prod_p (1-p^{-1}) = 0$ から $\sum_p \frac{1}{p} = \infty$ も導かれる．実は $\sum_n \frac{1}{n(\log n)^2} < \infty$ なので素数の出現頻度は $n(\log n)^2$ の頻度よりも多くなる．この素数の出現頻度の評価がリーマン予想につながっていく．これは小山信也氏の解説に詳しい．

幾何学における無限といえば，微分同相群や写像類群のような無限群の多様体への作用であろうか．特に双極幾何（1829年）の世界では，エッシャーの版画に代表されるような無限に繰り返される幾何学模様として無限群の作用が実現される．双極幾何に現れる無限については糸健太郎氏に解説していただいた．一方，幾何学には無限遠点という概念が存在する．複素数平面は無限遠点との和集