March 2017 MATHEMATICAL SCIENCES Number 645

特集／代数幾何の世界

パッポス，リーマンからグロタンディェクへ

向井 茂

この特集企画の依頼をいただく少し前にポーランドでの代数幾何の研究集会に参加してきました．ハノーバーからの参加者がいたり，開催地（ボズナニ近郊）が旧プロシア領であったことで，昼食時に昔のドイツの数学者，とくにリーマン，の話になりました．幼い頃，ポーランド独立運動の話を父親にねだったという話が紹介され，なるほど，そういう時代だったのかと気付かされました．

昨年のノーベル物理学賞にトポロジー的手法という言葉が現れましたが，この手法はリーマンが1857年の論文においてコンパクトなリーマン面を分類する際の不変量（種数）として導入したのが最初です．また，昨年は重力波が観測されたことも大きなニュースでしたが，その根拠となったのはアインシュタインの重力場方程式

$$R_{\mu,\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu,\nu}=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu,\nu}-\Lambda g_{\mu,\nu}$$

でした．この左辺の $R_{\mu,\nu}$ や R はリーマン曲率テンソルから縮約で得られるものです．これらに加えて，ゼータ関数（あるいは素数分布）に関する有名な予想までが同一人物によって短期間のうちになされたのは奇跡のように思えます．

さて，「代数幾何の世界」というタイトルから，ケンプ氏の教科書[1)]の序文を思い出しました．

> 代数幾何は二つの地中海文化の思想の混ざり合ったもので，位置と形に関するギリシャの学問に，すばやく方程式の解を計算するアラビアの科学を重ね合わせたものである．

例えば，パッポスという数学者は4世紀のアレキサンドリア学派の人で，図1の3点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$ が一直線上にあるという定理を発見しました．射影の概念はずっと後世にならないと現れませんが，射影変換で不変な射影幾何最初の定理です．

この定理は代数とも関係します．射影幾何を公理化した際に，適当な公理（デザルグの定理の成立）の下で係数体が定まります．すなわち，N 次元射影空間 $\mathbb{P}^N$ の点は，よく説明されるように，係数体に属する $(N+1)$ 個の数の連比 $(a_0 : a_1 : \cdots : a_N)$ で表されます．パッポスの定理はこの係数体の可換性に他なりません．射影幾何学は19世紀前半を黄金期とし，ケイリーによる3次曲面上の27直線（秦泉寺氏の記事）の発見もここに属します．解析幾何や射影幾何が代数幾何学前史を飾っています．

さて，現代代数幾何に直結する上述のリーマンの論文は，アーベル積分（楕円積分の一般化）や多重周期正則関数の研究の中から現れました．ここで誕生したリーマン面の概念は徐々に複素多様

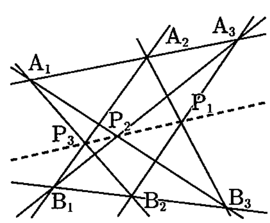

図1 パッポスの定理．