特集／関数解析的思考法のすすめ

関数解析の広がり

新井 仁之

1. 関数解析的思考法とは

大学1年の微分積分あたりまでは，主に関数の性質を学ぶ．例えばある関数がどこで極値をとるか，積分の値は何かなどである．これに対して関数解析では，関数からなる集合（関数空間），あるいはそれを抽象化した空間の性質を調べ，それらの空間から空間への写像について研究する．関数解析をまだ学んだことのない読者のために，初めに関数解析的方法の例を紹介しておこう．

有界閉区間 $[a,b]$ 上の実数値連続関数全体のなす集合を $C[a,b]$ により表す．$f,g \in C[a,b]$ に対して

$$d(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

とおくと，これは $C[a,b]$ 上の距離になり，$(C[a,b],d)$ は完備距離空間になっている．ここで距離空間が完備とは，コーシー列が収束列になっていることである．次の定理が知られている．

定理 1（縮小写像の原理） (X,ρ) を（空でない）完備距離空間とする．T を X から X への写像とし，T^n により T を n 回合成した写像とする．いまある自然数 N とある正数 $K<1$ で，

$$\rho(T^N(f),T^N(g)) \leq K\rho(f,g), \quad f,g \in X$$

をみたすものがあるとする．$f_0 \in X$ を任意の元とし，$f_n = T^N(f_{n-1})$ $(n=1,2,\cdots)$ と逐次的に定義する．このとき，極限 $f = \lim_{n\to\infty} f_n \in X$ が存在し，$T(f)=f$ をみたす．また $T(g)=g$ をみたす $g\in X$ はただ一つに限る．

定理1を使って，例えばヴォルテラの第2種積分方程式

$$h(x) = f(x) - \lambda\int_0^x K(x,y)f(y)dy \quad (1)$$

（ただし $K(x,y)$ と $h(x)$ はそれぞれ $[a,b]\times[a,b]$ と $[a,b]$ 上の実数値連続関数で，λ は実数）の解 $f\in C[a,b]$ の存在を次のように示すことができる．$\varphi \in C[a,b]$ に対して，

$$T(\varphi)(x) = \lambda\int_0^x K(x,y)\varphi(y)dy + h(x)$$

と定義する．T は $C[a,b]$ から $C[a,b]$ への写像であり，十分大きな自然数 N をとれば定理1の条件をみたすようにできる．ゆえに定理1より，$T(f)=f$ をみたす f，すなわち積分方程式 (1) の解 $f\in C[a,b]$ が一意的に存在する．

このようにある種の抽象的な空間とその上の写像の解析をし，それを用いて課題を研究する方法が関数解析的方法と呼ばれている．もちろん，これは関数解析的方法の一例である．

2. 関数解析の広がり

さて，関数解析は20世紀はじめに勃興し，多