まえがき

偏微分方程式の解の幾何学的性質の探求はこれまで多くの研究者を魅了してきた．偏微分方程式の解の存在，一意性，安定性，滑らかさ，漸近挙動，定量的・定性的性質等を研究対象としてきた偏微分方程式論において，あたかも初等幾何学において一本の補助線を発見することにより解法が鮮やかに浮かび上がるように，幾何学的洞察は重要な役割を演じ，時には予期せぬ有用な結果を導いてきた．本書では数理物理に現れる偏微分方程式で記述されるいくつかの数理モデルの解からその幾何学的性質のいくつかを数学解析の手法を用いて抽出することを主な目的とし，その過程で幾何学的洞察・手法やこれまで偏微分方程式論で培われてきた基礎理論の有用性を垣間見る．

様々な偏微分方程式のうち，本書ではいくつかの基本的な偏微分方程式を扱う．第 1 章では文献 [17] を参考に反応拡散方程式 (1.2) を導出する．第 4 章では，幾何学で現れる偏微分方程式の例として，平均曲率 H を持つ曲面を局所的に関数 h のグラフとして表すとき，h の満たす偏微分方程式 (4.10) を導出し，第 6 章で平均曲率が一定であるシャボン玉の方程式が変分原理から導かれることを示す．第 5 章では文献 [5], [16] を参考に音波の方程式 (5.5) を導出する．第 7 章では導電場方程式 (7.1) を導出する．

数理モデルの解からの幾何学的性質の抽出例は次のようである．第 3 章では熱拡散の初期挙動と領域の境界からの距離関数の関係を与えるヴァラダンの定理（定理 3.4）を証明する．第 4 章では領域の境界に接する球の持つ熱量の初期挙動と接点での境界の主曲率の関係を示すマニャニーニ–坂口の漸近公式（定理 4.4）を証明する．第 6 章では「シャボン玉は丸い」ことを示すアレクサンドロフのシャボン玉定理（定理 6.12）を証明する．第 7 章では複合媒質上の導電場方程式を扱い，外側の全ての一様な電場に影響を与えない中性導体としての同心球の特徴付けを与えるカン–リー–坂口の定理（定理 7.6）を証明する．第 8 章では，まず単一媒質上の普通の熱方程式を扱い，不変等温面を 1 つ持つ領域としての球の特徴付けを与えるマニャニーニ–坂口の定理（定理 8.3）を証明し，次に複合媒質上の熱拡散方程式を扱い，別の方法で，不変等温面を持つ複合媒質としての同心球の特徴付けを与える坂口の定理（定理 8.11）を証明する．

本書で繰り返し現れ重要な役割を演ずる幾何学的洞察として反射原理がある．まず，第 5 章で波動方程式の半空間上の初期境界値問題の解は，空間変数に関する反射原理によって波動方程式の全空間上の初期値問題の解に帰着される．また，時間変数に関する反射原理は波動方程式と熱方程式のそれぞれの初期値問題の解どうしの関係式（定理 5.8 と定理 5.9）を導く．さらに第 6 章においてアレクサンドロフのシャボン玉定理（定理 6.12）の証明に反射原理に基づくアレクサンドロフの平面移動法を用いる．この平面移動法は第 8 章において単一媒質上の熱方程式に対する不変等温面を 1 つ持つ領域としての球の特徴付けを与えるマニャニーニ–坂口の定理（定理 8.3）の証明でも用いられる．第 4 章のマニャニーニ–坂口の漸近公式（定理 4.4）の証明では領域の境界からの符号付き距離関数と境界の主曲率が重要な役割を演ずる．また，もう 1 つの有用な幾何学的洞察は単純ではあるが，第 7 章において，楕円型境界値問題の過度境界条件に関する領域の優決定定理（定理 7.8）

の証明の中で重要な役割を演ずる角度方向の偏微分作用素 A_{ij} の利用である．

本書で用いられる解析学の手法について述べよう．まず，発散定理は多変数関数の微分積分学の基本定理にあたり，第 4 章以外の全ての章で用いられる．第 4 章ではその代わり余面積公式が重要な役割を演ずる．第 2 章において，微積分学の微分を用いた硬い方法と積分を用いた柔らかい方法の対比を見る．熱方程式に対する弱最大値原理の有用性を第 3 章と第 4 章で示し，熱方程式に対する強最大値原理とホップの境界点補題の有用性を第 8 章で示す．楕円型方程式に対する強最大値原理とホップの境界点補題の有用性は第 6 章と第 8 章で示される．また，熱方程式に対する基本解の有用性は第 3 章と第 5 章で現れる．ラプラス方程式に対する基本解の有用性は第 7 章に現れる．熱伝導率が不連続な熱拡散方程式 (8.23) に対する基本解および弱最大値原理の有用性は第 8 章に現れる．

用語の説明や使う数学をなるべく自己完結的になるように努めるが，弱解の属するソボレフ空間や弱解の滑らかさについては曖昧にして本書では触れない．例えば，不連続な導電率に関する弱解としての第 1 固有関数の存在と連続性（定理 7.4），不連続な熱伝導率を持つ熱拡散方程式の弱解に対する弱最大値原理（定理 8.9）および弱解としての基本解の基本的事実（定理 8.10）は，本書の状況に合わせた形で，それぞれ文献 [13]，[24]（および [3], [4], [9]）から証明なしで引用する．このような基礎理論の重要性については本書により理解していただけるのではないだろうか．なお，本書中の練習はどれも基本的なもので他の文献を参照せずに解けるものであるから読者自ら取り組んでほしい．例えば，命題 8.7 の証明を与える練習は，時間変数に関する部分積分法も考慮することによって，命題 7.5 の証明と同様にできる．また，楕円型方程式に対する基礎理論については名著 [13], [25], [36] があげられ，時間変数に関する微分を含む放物型方程式に対する基礎理論については名著 [10], [24] があげられる．どの本も重厚であり，もしどれか 1 冊を熟読できれば読者の解析学の礎が築かれるように思われる．本書で利用する発散定理，ポアンカレの不等式および余面積公式については名著 [8], [44] があげられる．文献 [23] には境界が C^1 級である有界領域に対する発散定理の証明が書かれている．

この場を借りて，我が国の偏微分方程式の解の幾何学的性質や幾何学的洞察・手法に関する研究者の最近の動向について触れておきたい．2 年毎に開催されてきた伊日研究集会「Italian-Japanese workshop on geometric properties for parabolic and elliptic PDE's」：第 1 回（2009 年 6 月，仙台），第 2 回（2011 年 6 月，コルトナ），第 3 回（2013 年 9 月，東京），第 4 回（2015 年 5 月，パリヌーロ）に関連してそれぞれ論文集 [12]，[34]，[6]，[11] が既に出版されている．毎年 11 月に京都大学数理解析研究所で開催されてきた RIMS 研究集会：「偏微分方程式の解の幾何」（2012 年，2013 年），「偏微分方程式の解の形状と諸性質」（2014 年，2015 年），「偏微分方程式の解の形状解析」（2016 年）は幾何学的性質や幾何学的洞察に焦点をあてたものであった．今後の発展が期待される．

本書の主要部分は，著者が東北大学大学院情報科学研究科で行った留学生を含めた大学院生向けの講義で用いた英語のノートに基づく．「数理科学」編集部の大溝良平氏には仙台の研究室まで足を運んでいただいたり，また執筆の遅れに寛大に辛抱強く配慮していただいた．また，平勢耕介氏には編集作業の際に無理を聞いていただいた．感謝の意を表したい．

2016 年 12 月 坂口 茂

目　次