まえがき

人類はまず数を I, II, III のように数字で表す記数法を生み出した．そして，未知数に文字を割り当て，満たすべき条件を方程式として書き表し，記号操作等で解を求めることを考えるようになった．方程式は古代から用いられてきた問題解決の手法であり，代数学の源流の一つである．特に有名な問題として，一般に代数方程式の係数から解を求める「解の公式」が存在するか，というものがある．この問題は，長い歴史を経て 19 世紀に解決されたが，その過程で「体」や「群」といった代数系の概念が抽出され，抽象代数学の発展が促された．そこで本書でも，方程式を話題の中心に据えて，解の公式はもちろんとして，広く代数に関わる内容を扱うことにした．

方程式の話題は代数の範囲で完結するものではない．まず，ガロア（Galois）理論により，解の公式が存在するかどうかは解の対称性によって判定されるように，方程式は幾何とも深い関わりがある．円や放物線のように，代数方程式の解の全体は単なる集合ではなく代数多様体と呼ばれる図形になり，幾何の対象になる．図形の幾何的性質はその上の関数のなす環の代数的性質と対応させて調べることができる．次に，代数学は本来，問題を有限回の具体的な手続きで解く方法を与えるという，計算的側面をもつ．近代の抽象代数学で現れた，いつ終わるかはわからないが存在する，という論法は，数学ではない，神学だ，と言われたという伝説があるほどである．古典的なアルゴリズムとして，最大公約数を求めるユークリッド（Euclid）の互除法や，連立 1 次方程式を簡約化する掃き出し法（消去法）が基本的である．現代では高次の連立方程式の簡約化としてグレブナー（Gröbner）基底の理論もある．この計算的側面は，近年の計算機の発展に伴いますます重要になっている．さらに，線形方程式・不等式と応用数学との関わりも重要であり，純粋数学だけを学んでいては気付かない興味深い話題がある．これら代数を越えたところに広がる様々な風景をも，楽しみながら訪ねて行けたらと思うのである．

各章では，まず高校数学程度で意味が理解できる例題を提示し，その解法を通じて，代数学の様々な要点を取り上げていく．具体的な問題を解くときには，さまざまな代数構造が混ざって出てくるので，講義のように系統だてて「線形代数」「群論」「環論」「体論」と順を追って述べることはしない．それぞれの問題に即して接することで，生きた題材の全体に触れ，同時に，問題を解く力もつけられればと思う．予備知識は高校数学 $+\,\alpha$（行列の基礎程度）しか基本的には仮定していないが，興味をもたれた部分や省略してある部分（ほとんどは標準的な代数学のテキストに載っている）は必要に応じて補っていただければと思う．

もし本書を通じて読者に代数を用いる面白さを少しでも感じていただくことができたなら，そしてさらに先の世界へと勉強を続けていただけたら，本当にありがたい，というのが筆者の思いである．

本書は，雑誌『数理科学』に 2 年余りにわたり連載した内容を一冊にまとめたものである．毎回毎回なかなか原稿が完成しない筆者を辛抱強く見守ってくださった大溝良平氏，一冊にまとめるにあたり編集を担当してくださった平勢耕介氏のサイエンス社のお二人を始め，支えてくださった皆様に心から感謝いたします．

2017 年 6 月 小林 正典

目　次