数学の準備から
はじめよう！
数学に自信がない人は
ここからスタート！

第1章 数学的準備

学部 1，2 年生にとって，電磁気学は少し取っつきにくい教科でしょう．その原因には，電磁気学を理解するには場の概念が必要ということがあります．そして，場を扱うにはベクトル解析という数学が必要になります．こうした知識の乏しい学部 1，2 年生が授業で，磁場や電場をベクトルで表したり，その簡単な微分や積分は理解できても，ガウスの法則の積分形や

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

微分形

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

に出会うと，違和感はかなり大きいと思います．そのため電磁気学が苦手になる人もいるのではないでしょうか．これは例えるなら，泳ぎ方をを知らずに深いプールに入るようなものです．苦手になるのは当然かもしれません．この章では電磁気学を学ぶのに必要な数学を説明します．このあたりの数学を知っている人は読み飛ばして構いません．全く触れたことのない人，触れたことはあるけど明確に理解していないと感じる人は是非とも読んでください．電磁気学を理解するのに役立ちます．

この章での説明は数学的な厳密さよりも，どのように理解できるかに重点を置いています．また，この章のすべてを理解しないと次に進めない訳ではありませんので，ざっと目を通して必要なときに，もう一度振り返って理解を深めるのが良いと思います．繰返しは，物事の理解にとって大変大切です．

まずは
ベクトルから

まずはウォーミングアップ
基本問題にチャレンジ
良問中の良問
演習問題で腕試し
大学院入試問題
難しいテーマにもチャレンジ！
詳しい解答

1.1 ベクトルの基本性質**

——電磁気に必要なベクトル解析で使うベクトルの性質

Contents

キーポイント

内積やベクトルの回転行列はすでに知っているはずだが，外積は初めてでちょっと難しい．外積は回転運動と関係している．単位ベクトルは意外に大切である．

電磁気学で扱うベクトルは，3 次元空間のベクトルです．特殊相対性理論に関係した場合は 4 次元ベクトルも扱いますが，それまでは空間 3 次元です．ベクトルは「$\vec{A}$」のように上付き→で表記されたり，「$\boldsymbol{A}$」のようにボールド体（太字）で表記します．本書ではボールド体で表記します．**デカルト座標系**（xyz 座標系）では，ベクトルとその成分は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= (A_x, A_y, A_z) \\ &= A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z \end{aligned} \tag{1.1}$$

と表されます．$\boldsymbol{e}_x$ は x 軸方向の**単位ベクトル**であり，$\boldsymbol{e}_y$ は y 軸方向の単位ベクトル，$\boldsymbol{e}_z$ は z 軸方向の単位ベクトルです．$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ の各成分は

$$\boldsymbol{e}_x = (1, 0, 0), \quad \boldsymbol{e}_y = (0, 1, 0), \quad \boldsymbol{e}_z = (0, 0, 1)$$

です．

ベクトルの和は以下の規則に従います．

交換則：$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$

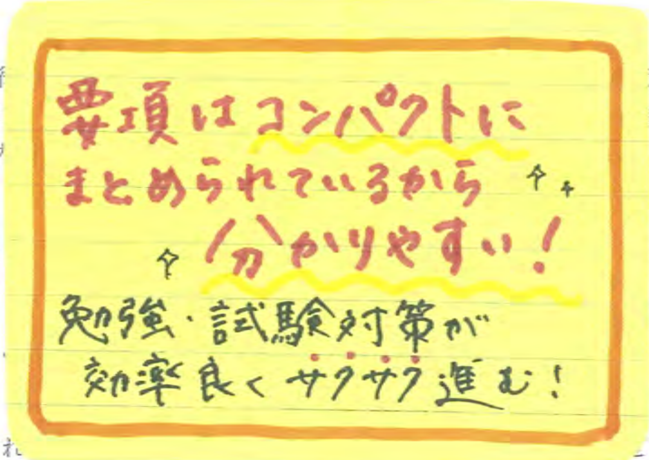
結合則：$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$

分配則：$a(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = a\boldsymbol{A} + a\boldsymbol{B}$,
$(a + b)\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{A}$

❶内積

ベクトルの**内積**は $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ と表され，以下のように定義されます．

(1.2)



ここで，最… …わりに A_2, A_z
の代わりに… …θを用いると，
$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の内…

と書くこと… …の各成分は

ですので，…

とまとめられ… …ことを表しています．ここで，δ_{ij} はクロネッカーのデルタと呼ばれ，$i = j$ のとき $\delta_{ij} = 1$，$i \neq j$ のとき $\delta_{ij} = 0$ となります．内積の計算は以下の法則に従います．

交換則：$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$

結合則，スカラー倍：$\boldsymbol{A} \cdot (a\boldsymbol{B}) = (a\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B}$

分配則：$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$

❷外積

ベクトルの**外積**には，定義の仕方がいくつかありますが，ここでは次のようにします．まず，x, y, z 座標軸方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ に対して，ベクトル積として次のような規則を定義します．例えば，

$$\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z$$

これは z 軸方向を向いた右ネジを x 軸から y 軸へ回すと，右ネジは z 軸方向に進むことに対応しています．同様に，

$$\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x, \quad \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y$$

ネジを逆に回すと，右ネジは $-z$ 軸方向に進みますので

$$\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_x = -\boldsymbol{e}_z$$

基本問題にチャレンジ
良問中の良問
演習問題で腕試し
大学院入試問題
難しいテーマにもチャレンジ！
詳しい解答

基本問題 1.1

以下の式を計算せよ．ただし，$\boldsymbol{r}=(x,y,z), r=|\boldsymbol{r}|$ である．

(1) ∇r

(2) $\nabla\cdot\boldsymbol{r}$

(3) $\nabla\times\boldsymbol{r}$

(4) Δr

方針 基本となる計算です．ナブラ演算子の計算に慣れましょう．

【答案】 (1) x 成分について計算する．このとき $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ に注意する．

$$
\begin{aligned}
(\nabla r)_x &= \frac{\partial r}{\partial x}\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\
&= \frac{x}{r}\\
&= \left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)_x
\end{aligned}
$$

y, z 成分についても同様に計算できるので

$$
\begin{aligned}
\nabla r &= \left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)_x+\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)_y+\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)_z\\
&= \frac{\boldsymbol{r}}{r}
\end{aligned}
$$

(2) 発散の定義に従い計算すると

基本問題にチャレンジ！
方針・答案・ポイントの3段階で，パターン化された問題を素早く解く力が身につけられる！

(3

y, z

(4) ラプラシアンの定義に従って計算すると

$$
\Delta r=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)r
$$

ここで

"ポイント"は著者の講義経験からのアドバイス
しっかり読んで実力アップを図ろう！
間違いやすい点もコメントされています

同様

$$
=\frac{2}{r} \blacksquare
$$

ポイント 一番単純な位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ とその大きさ r について勾配や発散，回転，ラプラシアンを計算しました．これは $\boldsymbol{r}$ をベクトル場として計算しました．その結果を良く考えると勾配や発散，回転，ラプラシアンの意味を理解する助けになります．(1) はなぜ $\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトルになったのでしょう．(2) はなぜ 3 なのでしょうか．(3) はなぜ 0 なのでしょうか．(4) はなぜ正で r とともに減少するのでしょう．考えてみると面白いと思います．

基本問題 1.2

次の式を計算せよ．ただし，$\boldsymbol{E}=(E_x,E_y,E_z)$, $\boldsymbol{k}=(k_x,k_y,k_z)$ は，それぞれ定ベクトルである．また，ω は定数である．

(1) $\nabla\{\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}$

(2) $\nabla\cdot\{\boldsymbol{E}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}$

(3) $\nabla\times\{\boldsymbol{E}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}$

(4) $\Delta\{\boldsymbol{E}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}$

方針 やや難しいので飛ばして良いです．電磁波を扱うときに良く出てくる計算ですので，必要になったときにやりましょう．

【答案】 (1) x に依存するところは cos 関数の中の $\boldsymbol{r}$ のみであることに注意して，x 成分について計算すると，

基本問題 2.8　重要

電気量 Q の電荷が，原点を中心とする半径 a の球内に一様に分布している．このときの電場 $\boldsymbol{E}$ と静電ポテンシャル ϕ を求めよ．

方針　電荷分布が球対称なので電場は球対称になります．ある半径の球内に含まれる電気量は，この半径に依存することに注意して解きましょう．

【答案】　電荷は半径 a の球内に一様に分布しているので，この球の中心を3次元極座標の原点にとると，電荷密度は球対称で

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{3Q}{4\pi a^3} & (r < a), \\ 0 & (r > a) \end{cases}$$

ここで，半径 a の球の体積が $V = \frac{4\pi a^3}{3}$ を使った．電荷分布の対称性から，電場 $\boldsymbol{E}$ は座標原点に対して球対称であり[†]，$\boldsymbol{E} = E_r(r)\boldsymbol{e}_r$ と書ける．原点を中心とする半径 r の球の表面を S，体積を V として，これにガウスの法則を適用する（図 2.7）．

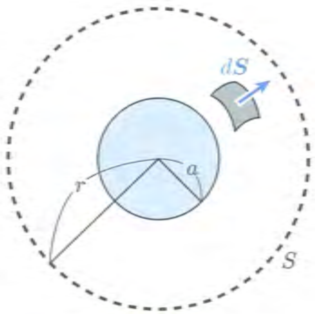


図 2.7

(i)　$r > a$ のとき，ガウスの法則

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$$

の左辺は，基本問題 2.7 と同様に

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = E_r(r)4\pi r^2$$

同じく右辺は

$$\int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

よってガウスの法則より

[†]演習問題 2.1.4 参照．

$$E_r(r)4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

となり

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r$$

これは半径 a 内のすべての電荷が原点に分布しているときの電場と同じである．

静電ポテンシャル ϕ を求める

重要問題!!

何度も繰り返して解ける

ようにしたい　良問中の良問!!

なので

(ii)　$r < a$

の左辺は (i) と

$$= \frac{}{\varepsilon_0}\frac{}{a^3}$$

となる．ガウスの法則から

$$E_r(r)4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{r^3}{a^3}$$

が得られ，

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3} r\,\boldsymbol{e}_r$$

この電場の特徴は電場の大きさが半径 r に比例していることであり，

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3} r\,\boldsymbol{e}_r = Q\frac{r^3}{a^3}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r$$

と書き換えると電場の大きさは半径 r 内の電気量 $Q\frac{r^3}{a^3}$ が原点にあるときの電場と同じになるという点である．これらはクーロン力の特徴である．

静電ポテンシャル ϕ を求める．積分区間を半径 a の球の外と中の二つに分けて

$$\begin{aligned}\phi(r) &= -\int_\infty^r \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} \\ &= -\int_\infty^r E_r\,dr \\ &= -\int_\infty^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr - \int_a^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3} r\,dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\frac{1}{2}(a^2 - r^2)\ ■\end{aligned}$$

演習問題

A

3.2.1 真空中に半径 a の無限に長い導体円筒と内半径 b の無限に長い導体円筒 ($a < b$) を同軸上に配置した．それぞれに単位長さ当たり電荷 $\lambda, -\lambda$ を与えたとき，このコンデンサーの単位長さ当たりの静電容量を求めよ．

3.2.2 基本問題 3.5 と同じ平行平板コンデンサーを考える．
(1) 電荷 Q が蓄えられている状態のまま，極板間隔を dx だけ増やした．このときに必要な仕事を求めよ．
(2) 起電力 V_0 の電池を接続した状態で極板間隔を dx だけ縮めた．このときに必要な仕事を求めよ．

B

3.2.3 基本問題 3.7 で扱った球形コンデンサーに蓄えられているエネルギーを，(1) 導体球から導体球殻に $0 \to Q$ の電荷を持ってくるのに必要な仕事，(2) 電場のエネルギー密度 $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ を用いて求めよ．

C

3.2.4 真空中に置かれた平行平板コンデンサーについて考える．このコンデンサーでは下の極板が固定されており，もう一方の上の極板にはばね（ばね定数 k）をつないだ（図 3.5）．また，極板間の間隔は，電荷が蓄えられていないとき d_0 であったが，正の電荷 Q を与えたところ d に変化した．極板の面積を S とし，電場は極板に垂直でコンデンサー内部にのみ存在するものとして以下の問いに答えよ．
(1) コンデンサー内部の電場を求めよ．
(2) コンデンサーの静電エネルギーを計算し，極板間に働く力の大きさと向きを求めよ．
(3) このコンデンサーでは d が Q に依存するので，極板間の電位差 V は Q に比例しない．上の極板に働く力の釣り合いを考えることにより d の Q 依存性を求め，それを用いて V と Q の関係を導け．

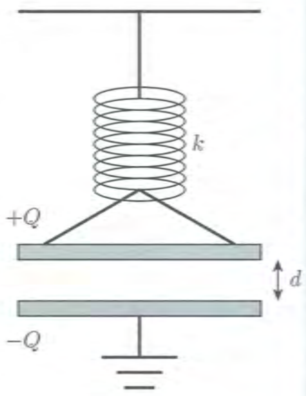


図 3.5

（北海道大学）

3.3 誘 電 体
——電場によって電荷が誘起される絶縁体，誘電体

Contents

キーポイント

静電場中に誘電体があると分極が起こる．静電場はその影響を受ける．それを理解するには電束密度と誘電体の関係の理解も大切である．

❶誘電体の性質

自由に移動できる電荷がない物質は…
言います．このよ…
子の中に電荷分…
な電荷分布が現…
す．分子の中の…
体は多数の電気双…
れた電荷を分極電…
まで扱ってきたよ…
ます．真電荷は物…
出すことができる…

誘電体の分極の様…

演習問題で
腕試し！
レベル別にA・B・Cに
分かれています．
Cは手強いけど挑戦してみて！

気双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ の関係について説明しましょう．電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ の電気双極子が数多く分布している物体を考えましょう．単位体積当たりの電気双極子の個数を n とすると単位体積当たりの電気双極子モーメントの和は $n\boldsymbol{p}$ となり，この

$$\boldsymbol{P} = n\boldsymbol{p}$$

を分極ベクトルと言います．

2.1 節（クーロンの法則）の基本問題 2.4 のポイントで，原点に置かれた電気双極子による点 $\boldsymbol{r}$ における静電ポテンシャル ϕ を示しました．これから，$\boldsymbol{r}' = (x', y', z')$ に置かれた電気双極子による点 $\boldsymbol{r}$ における静電ポテンシャルポテンシャルは，この電気双極子

演習問題で腕試し

演習問題

A

5.3.1 重要 磁場中を運動する荷電粒子が磁場から受ける力は仕事をしないことを示せ．

B

5.3.2 質量 m，電荷 q のイオンを速さ v で $z = L$ のスクリーンに向けて z 軸方向に発射し $t = 0$ で原点を通過した．$0 < z < l$ の領域には x 軸方向を向いた一様電場 $\boldsymbol{E}$ と y 軸方向を向いた一様磁場 $\boldsymbol{H}$ があり，電場と磁場は十分弱く v_z の変化は小さい．以下の問いに答えよ．ただし，$0 < z < l$ の外の領域の電場，磁場は無視できるとする．

(1) イオンが $0 < z < l$ を通過しているときの運動方程式を求めよ．次に，この運動方程式からイオンの速度の解を求めよ．

(2) (1) で求めた速度を $\frac{\mu_0 qHl}{mv} \ll 1$ としてテイラー展開し $\frac{\mu_0 qHl}{mv}$ の 2 次以上の項を無視した解を求めよ．

(3) (2) の結果を使いイオンがスクリーンに達するときの xy 座標を求めよ．この結果から，$x = 0$ となる v を求めよ． (九州大学)

5.3.3 速度 $\boldsymbol{v}$ で運動している電気量 q の点電荷を電流素片とみなすことができ，この運動する点電荷による $\boldsymbol{r}$ の点での磁束密度 $\boldsymbol{B}$ はビオ-サヴァールの法則を使って

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 q\boldsymbol{v}}{4\pi} \times \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}$$

と求められる．二つの点電荷 q_1, q_2 があり，ともに $t = 0$ で原点から移動を開始した．電荷 q_1 は x 軸上を一定の速さ v_0 で，電荷 q_2 は y 軸上を q_1 と同じ速さ v_0 で移動している．ただし v_0 は $v_0 > 0$ で光速 c に比べて十分小さい．時刻 t に点電荷がもう一つの点電荷による磁束密度から受けるローレンツ力の大きさと方向をそれぞれ求めよ．また，このとき，点電荷の間に働く静電気力とローレンツ力の大きさの比を求めよ． (九州大学)

5.3.4 物質の電気伝導が荷電粒子の移動による場合の荷電粒子の運動と電気伝導およびホール効果の関係について考える．電場 $\boldsymbol{E}$ の中を速度に比例した抵抗を受けながら運動する荷電粒子の運動方程式は，

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q\boldsymbol{E} - \frac{m\boldsymbol{v}}{\tau}$$

ここで m は荷電粒子の質量，τ は電気抵抗の効果を表す緩和時間である．導体には単位体積当たり n 個の移動する荷電粒子がある．電流密度 $\boldsymbol{j}$ は $\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}$ のオームの法則に従っている．ここで σ は電気伝導率である．

(1) 電流が定常のとき，荷電粒子の速度 $\boldsymbol{v}$ を求めよ．

(2) (1) の結果から電気伝導率 σ を n, m, q, τ を用いて表せ．

次に，直方体の導体の一番長い方向を x 軸としその正の方向に電流を流した．直方体の一番短い辺の方向を z 軸とし，その正の方向に一様な磁束密度 $\boldsymbol{B}$ をかけた．x 軸方向に運動する荷電粒子はローレンツ力を受ける．その結果，y 軸に垂直な直方体の表面 S_1, S_2 に電荷が蓄えられ，y 軸方向に新たに電場 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{H}} = (0, E_{\mathrm{H}}, 0)$ が生じる（**ホール電場**）．ここで S_1 の y 座標は S_2 より大きい．定常状態では，荷電粒子が受ける磁場によるローレンツ力とホール電場による力がちょうど釣り合い，荷電粒子は x 方向に直進し，$\boldsymbol{j}$ が定常になる．

(3) 荷電粒子の電荷 q の符号が正および負の場合について，S_1, S_2 に蓄えられる電荷の符号を述べよ．

(4) ホール電場の大きさ E_{H} を n, j, q, B を用いて表せ．ただし，$\boldsymbol{J} = (j, 0, 0), \boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ である．

(5) 電気伝導率 σ と**ホール定数** $R_{\mathrm{H}} = \frac{E_{\mathrm{H}}}{jB}$ の測定から得られる量で導体の性質を特徴付ける量について説明せよ． (北海道大学)

C

5.3.5 一様磁束密度（xyz 成分が $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$）と一様電場（同じく $\boldsymbol{E} = (0, E, 0)$）の中の荷電粒子の運動を考える．$B$ は正，荷電粒子の電荷を q，質量を m とする．$t = 0$ で荷電粒子の位置は原点にあり，初期速度は $\boldsymbol{v} = (v_0, 0, 0)$ とする．$0 < v_0 \ll c$ であり c は光速である．

(1) 荷電粒子の運動方程式を書け．また $E = 0$ の場合に荷電粒子は円運動することを示せ．

(2) $E > 0$ の場合に，初期条件を満たす荷電粒子の速度の解を求めよ．

動となること

大学院入試で
出題された問題に
チャレンジ!!
いよいよ総仕上げ．
丁寧な解説があるから大丈夫．
やってみよう!!

大学院入試問題

にもチャレンジ!

付章には電磁波の放射
双極子放射という興味深い
内容。さらに一歩進みたい方へ
オススメ

付　章

電磁波の放射

電磁波の放射は難しいですが，大変興味深いので付章として紹介します．

電荷と電流があるときのマクスウェル方程式は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho,$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0,$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t},$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

です．電荷や電流が激しく時間変動するとき，電磁波が放射されます．電磁波の放射の解を得るにはグリーン関数を使います．電磁波の放射のもっとも簡単な解である双極子放射の解の性質を調べます．この付章では，以上のことを説明していきます．

にもチャレンジ！

演習問題解答

2

第 2 章

2.1.1 (1) q_1, q_2, q_3 が x 軸上にあり，それぞれ $x=-d, x=0, x=d$ とする．各点電荷に働く力は x 軸方向であり，これを f_1, f_2, f_3 とすると，

$$
\begin{aligned}
f_1 &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{d^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{(2d)^2} \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{d^2}\left(q_2 + \frac{q_3}{4}\right), \\
f_2 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{d^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_3}{d^2} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{d^2}(q_1 - q_3), \\
f_3 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{(2d)^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_3}{d^2} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3}{d^2}\left(\frac{q_1}{4} + q_2\right)
\end{aligned}
$$

(2) これら三つの静電気力が 0 であれば良いので，$f_1=0, f_2=0, f_3=0$ より

$$
\begin{cases}
q_2 + \frac{q_3}{4} = 0, \\
q_1 - q_3 = 0, \\
\frac{q_1}{4} + q_2 = 0
\end{cases}
$$

これを解くと，

$$q_1 : q_2 : q_3 = 4 : -1 : 4$$

2.1.2 (1) 各点電荷の電気量はどれも等しく，さらに各頂点から正 12 角形の中心までの距離は等しいので，各点電荷による電場の大きさと静電ポテンシャルの値は中心で等しい．従って，対角同士の点電荷による電場は互いに打ち消し合うため電場は 0．静電ポテンシャル ϕ は，各電荷による静電ポテンシャル ϕ_i の和になるので

$$\phi = \sum_{i=1}^{12}\phi_i = \frac{12q}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{3q}{\pi\varepsilon_0 d}$$

(2) 静電ポテンシャルは，点電荷が 1 個減ったので

$$\phi = \frac{11q}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

電場の大きさは

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$$

で，その方向は 12 角形中心から点電荷が取り除かれた頂点の方向である．

2.1.3 (1) 点電荷 3 が点電荷 1, 2 から受ける力は

$$\boldsymbol{F} = \frac{q_1q_3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1|^3} + \frac{q_2q_3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2|^3}$$

で与えられる．$q_1 = q_2 = q, q_3 = -q, \boldsymbol{r}_1 = (-a, 0, 0), \boldsymbol{r}_2 = (a, 0, 0), \boldsymbol{r}_3 = (0, y, 0)$ より

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1 &= (a, y, 0), \\
\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2 &= (-a, y, 0)
\end{aligned}
$$

$$\therefore\quad |\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1| = |\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2| = \sqrt{a^2 + y^2}$$

これから $\boldsymbol{F}$ は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \left(0, -\frac{q^2y}{2\pi\varepsilon_0(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, 0\right)
\end{aligned}
$$

となり，y 成分のみ 0 でない．

(2) $y \ll a$ のとき，$\boldsymbol{F}$ の y 成分は

$$
\begin{aligned}
F_y &= -\frac{q^2y}{2\pi\varepsilon_0(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\frac{q^2y}{2\pi\varepsilon_0 a^3}\left(1 - \frac{3y^2}{2a^2} + \cdots\right)
\end{aligned}
$$

のように展開できる．ここで y の 1 次までとると

$$F_y = -\frac{q^2y}{2\pi\varepsilon_0 a^3}$$

運動方程式の y 成分は

$$m\ddot{y} = -\frac{q^2y}{2\pi\varepsilon_0 a^3}$$

これは単振動の方程式になっている．この単振

動の角振動数は

$$\omega = \sqrt{\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 m a^3}}$$

2.1.4 球の中心を原点とする．簡単のため $\boldsymbol{r}$ は z 軸上にあるとし，xyz 成分は

$$\boldsymbol{r} = (0, 0, r) \quad (r > 0)$$

とする．球の表面に電荷が…

ので電荷…

球の表面…

ると，…

この電荷…

$d…$

ここで…

た．こ…

$\boldsymbol{E}(…$

詳しい解答

過程からまとめられた超詳しい

解答だから自習書に最適！

必ず自分自身で解いてみてから

解答と比較してみよう!!

ここで，半径 R の球の表面の dS を 3 次元極座標を用いて表すと

$$dS = R^2 \sin\theta\, d\theta d\phi$$

また $\boldsymbol{r}'$ の xyz 座標は

$$\boldsymbol{r}' = (R\sin\theta\cos\phi, R\sin\theta\sin\phi, R\cos\theta)$$

$\boldsymbol{r}$ の xyz 座標は

$$\boldsymbol{r} = (0, 0, r)$$

であるので

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' &= (-R\sin\theta\cos\phi, \\
&\qquad -R\sin\theta\sin\phi, r - R\cos\theta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad & |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^2 \\
&= (-R\sin\theta\cos\phi)^2 + (-R\sin\theta\sin\phi)^2 \\
&\quad + (r - R\cos\theta)^2 \\
&= R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta
\end{aligned}
$$

これらを使うと

$$
\begin{aligned}
& E_x(\boldsymbol{r}) \\
&= \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{\sigma R^2\sin\theta\, d\theta d\phi}{4\pi\varepsilon_0(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} \\
&\qquad \times(-R\sin\theta\cos\phi), \\
& E_y(\boldsymbol{r}) \\
&= \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{\sigma R^2\sin\theta\, d\theta d\phi}{4\pi\varepsilon_0(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} \\
&\qquad … \sin\phi),
\end{aligned}
$$

$$… \frac{… \theta d\phi}{… Rr\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

…しているのは

$… = 0$

…しているのは

$$\int_{\phi=0}^{…}\sin\phi\, d\phi = [-\cos\phi]_0^{2\pi} = 0$$

$$\therefore\quad E_y = 0$$

E_z は被積分関数は ϕ によらないので ϕ についての積分を先に行うことができ，θ だけの積分となる．$Z = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta$ とおくと

$$dZ = 2Rr\sin\theta\, d\theta$$

なので

$$
\begin{aligned}
& E_z(\boldsymbol{r}) \\
&= \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{\sigma R^2\sin\theta\, d\theta d\phi}{4\pi\varepsilon_0(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} \\
&\qquad \times(r - R\cos\theta) \\
&= 2\pi\int_{Z(\theta=0)}^{Z(\theta=\pi)}\frac{\sigma R\, dZ}{8\pi\varepsilon_0 r Z^{\frac{3}{2}}} \\
&\qquad \times\left(\frac{Z - R^2 - r^2}{2r} + r\right) \\
&= \int_{Z(\theta=0)}^{Z(\theta=\pi)}\frac{\sigma R\, dZ}{4\varepsilon_0 r}
\end{aligned}
$$

2

詳しい解答