February 2018 MATHEMATICAL SCIENCES Number 656

特集／幾何学と次元

# 次元

## 幾何学における階層

小島　定吉

私は低次元トポロジーが専門である．私が学生だった1970年代には低次元トポロジーは認知度が低く，数学者のコミュニティーにおいても低次元トポロジーは低次元と思われていた節がある．昨今注目度が高い結び目理論は低次元トポロジーの一つの分野だが，その日本での先駆者の寺阪英孝先生が晩年になって阪大時代のある同僚から，「お前のやっていることの意義がようやく分かった」と言われたという話を聞いたことがある．幸いにも低次元トポロジーの認知度は今日では広がり，分野名として市民権を得て，科研費の審査区分表の小区分の内容の例にも含められている．

ところで，上で述べた「低次元トポロジーは低次元」という表現に代表されるように，いつの頃からか「次元」という言葉は数学や物理の枠を超えて広くしかも日常的に使われている．たとえば，社長が重役に「どいつもこいつも発想が低次元！」と怒鳴りつけるとか，食通が「この店のラーメンのスープはあの店のとは次元が違う！」とかである．だから，数学や物理で使われる学術的意味以前に，一般人は「次元」という言葉にそれなりの感覚を持っている．幾何学で初めて次元を意識したのはリーマンであり，その画期的アイデアが後の数学の進展に多大な貢献をしたことが森田氏の記事に記されている．また，物理で次元が明示的に登場したのはアインシュタインの相対性理論においてであることが，太田氏のコラムに記されている．いずれにしても「次元」は，学術用語としてそれなりの歴史を持つが，時を経て日常用語に格上げされたのは，ギャップが大きいことを強調する用語として耳ざわりの良い語感が幸いしたに違いない．「dimension」を「次元」と訳した識者の感性に深く憧憬の念を抱くのは私だけではないだろう．

数学教育の現場で「次元」が初めて本格的に現れるのは線形代数においてであり，ベクトル空間の次元は基底の要素の濃度として定義される．とくにこの次元は有限であれば非負の整数である．たとえば，$\mathbb{R}^n$ などの記号で $n$ 次元数ベクトル空間を表すのが普通である．これは数字を順序込みで $n$ 個並べた数ベクトルを集めた空間で，たいへん分かりやすい．また，抽象的な $n$ 次元ベクトル空間は基底を指定すると $\mathbb{R}^n$ と同型であることが容易に分かる．こうして，次元はそもそもベクトル空間の同型類の不変量であるが，有限次元のときは容易に完全不変量となっていることが分かる．この事実は実は無限次元の場合も正しい．

現代幾何学の主役である多様体は次元とは切っても切り離せない関係にあり，定義がそもそも次元を事前に宣言することでなされる．すなわち，$n$ を非負の整数とするとき，$n$ 次元多様体とは，各点が $\mathbb{R}^n$ のある開集合と位相同型な近傍を持つ位相