MATHEMATICAL SCIENCES

November 2018 Number 665

特集／微分方程式の考え方

微分方程式とは何か

法則を記述し現象を解き明かす数学

堤 誉志雄

1. 物理法則と微分方程式

微分方程式と力学は，切っても切れない関係にある．まずはその話から始めることにしよう．数式を使って最初に物理法則を記述したのは，Galileo Galilei であると言われている．彼は“落体の法則”，即ち静止状態から自由落下する物体の運動を $y(t)=\frac{1}{2}gt^2$ という等式で書き下した．但し，y は物体が鉛直下方向に落下した距離，g は重力加速度定数，t は落下時間である．しかし，Galileo による落体の法則では，運動と力の関係が明確ではなかった．実際，右辺は t に関する 2 次関数であるから，時間がたてばたつほど，単位時間あたりの落下距離が大きくなる，つまり落下速度が速くなることが分かる．物体の運動速度が速くなるには，力が加わっているはずであるが，この式を眺めても，そのことは見えてこない．物体の落下する距離は予測できても，なぜそのような現象が起こるのかという，背後にある物理法則は説明できないのである．ところが，Newton は速度を $v=\dot{y}$ とおき，$m\dot{v}(t)=mg$（m は物体の質量）と書いた．ここで，$\dot{y}$ は関数 $y(t)$ の時間微分を表す．このとき，Newton によって与えられた式は，質量 m の物体が受ける重力の大きさと，それによって生じる落下速度変化の割合との関係を明確に示しているのである．Newton はこれを一般化し，$\dot{p}(t)=F(t)$ とした．ここで，$p(t)$ と $F(t)$ は，それぞれ時間 t における物体の運動量と物体に作用する力である．この式は運動の第 2 法則とよばれる．さらに，質量が時間によらず一定のときは，時間 t での物体の位置を $x(t)$ とすると，運動の第 2 法則は $m\ddot{x}(t)=F(t)$ と書くことができる．この式は各時間での物体の位置を決定するため，運動方程式とよばれている．Galileo の落体の法則と較べ，Newton による運動の第 2 法則のほうがより根源的な法則であることが分かるであろう．

微分方程式は，各時間だけの法則・原理の働き方を記述しているのではない．微分は各時間の無限小近傍の情報を含んでいるのである．このことを数学的に考察してみよう．実数直線上の関数 $f(x)$ が点 x で微分可能であるとは，

$$f(x+h)-f(x)=ah+o(h) \quad (h\to 0) \quad (1)$$

を満たす実数 a が存在することである．ここで，$o(h)$ は Landau の記号とよばれ，関数 $g(x)$ が $g(x+h)=o(h)$ $(h\to 0)$ であるとは，$\frac{g(x+h)}{h}\to 0$ $(h\to 0)$ が成立することとする．

さて，図 1 のように，関数 $f(x)$ を点 x_0 の近傍で，直線によって近似することを考える．いま，

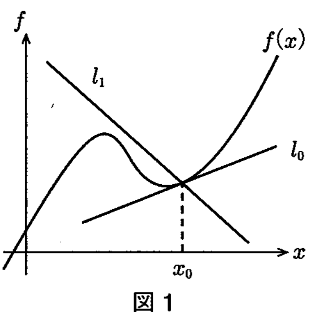

図 1