# まえがき

サイエンス社 編集部から，『ファインマンダイアグラム』について書かないかと声を掛けていただいた．曰く——「通常の摂動論をきちんと解説し，ファインマンダイアグラムで行うのに比していかに大変であるかを示すことにより，その重要性を読者が納得できるようにして貰いたい」——ということであった．ファインマンダイアグラム（ファインマングラフやファインマン図とも呼ばれる）は，場の量子論（特に量子電磁力学 (QED)）で大きな役割を果たすきわめて強力な，かつ誰もが少し学べばすぐに行うことの出来る近似方法である．この“誰もが少し”というフレイズは大変重要で，世の中には数多の近似法があるが，大半は特定の狭い目的のみに使われ，手法として普遍性を著しく欠く魅力に乏しいものである．ファインマンの有名な逸話 ——とある研究会の立ち話で，あるプロセスが重要そうだということになり，まあ調べてみましょうということで，次のセッションに入った．ところが，そのすぐ後の休憩時間でファインマンが「さっきの話だけど…」といって答を披露した．もちろん誰も信用しなかった．十数時間，人によっては 2, 3 日を要するのが常識であった（現在でも）—— にあるように従来の摂動計算に比してきわめて見通しのよい，扱いやすい近似法なのである．

理由の一つとして，従来の摂動論は（相対論的不変性を持つ場の理論においても）シュレディンガー方程式に対する摂動であり，これはハミルトニアンを基礎としており相対論的不変性の見えにくいものであった*1)．それに対し，ファインマンダイアグラムでは相対論的不変性が顕わに保証され，計算の見通しがきわめてよいのである．しかし，それだけではない．通常の摂動計算はそれ自体大変である．

その大変さを説明するため，面倒な計算の例として教科書にある標準的な摂動計算（時間によらない摂動が主）を解説していこうかと考え始めたのであるが，素粒子・高エネルギー分野で必要な（場の量子論での）散乱振幅計算をマスターするためだけではなく，より広い領域を対象とする近似計算も含めた方がよいのではないかと思い直した．そのため，従来の量子力学の教科書では（最初からは）あまり取り上げられないファインマン核の摂動に着目することにした．その理由は，ファインマン核を知ることは波動関数を知ることに他ならず，さらに統計力学の分配関数とも密接に関係しており，従って系の基底状態のエネルギーを取り出すことが出来，特に多体問題では極めて有用であるからだ．教科書では時間に依らない摂動の後，時間に依る摂動としてごてごてと書かれており，あまり魅力ある部分ではないが，ここでは対象をファインマン核に絞り量子力学の（特にブラとケットを用いた）基礎的知識のみを使い論理的・系統的に分かりやすく解説してある．その

---

*1)　ハミルトニアンはエネルギー $E$ と同じ変換性，つまり 4 元ベクトル $p^\mu$ の第ゼロ成分

$$p^0 = \frac{E}{c};\ p^1 = p_x;\ p^2 = p_y;\ p^3 = p_z;\ (c：光速度)$$

として振る舞い，別の系から見ると $p^i$ ; $(i = 1, 2, 3)$ と混ざってしまう（ローレンツ変換で互いに混じり合う—5.1.2 で解説する）．

意味で，ブラとケットを用いた量子力学計算の演習書としての役割も果たすものである．比較のため，上で述べた標準的摂動論は付録 A で議論する．これらから，ファインマンダイアグラムを用いない，オーソドックスな計算方法では答を得るまでに手間が掛かる（なおかつ，煩雑さのために計算間違いが多々生じる）ことが見て取れ，ファインマンダイアグラムの手軽さが分かると思う．

実際この教科書を書くにあたり，全てのプロセスは新たに計算して書き下ろしたわけであるが，ファインマンダイアグラムを使わない場合には，場所によっては丸 3 日掛かったところもあるくらい手間は掛かる．計算ミスも起きる．それは往々にして最終的な計算のところで起こるので，しばしば絶望的になることさえある．例えば付録 A にある，伝統的な摂動ではいくつかの非摂動系の波動関数の足し算・引き算が必要であるが，係数が少し違っていたり，符号が間違っていたりすることはしょっちゅうで，なかなか正しい答にたどり着かない．しかし，ファインマンダイアグラムでは丸 3 日の計算もほんの数十分で済んでしまい，ミスも少ない．もちろん，問題点もある．オーソドックスな方法では，グラフでいうところの数え落としはまずありえない（計算間違えはあるが）．しかし，ダイアグラム計算では数え落としは避けられない．特に摂動の次数が高くなり，グラフの数が増えた時はそうである．ゆっくり，落ち着いて丁寧に書き出していかなければならない．そのために，ファインマン則を与える親公式（場の理論ではウィック展開という）に帰って計算することが必要になることもある（グラフの数え落としのチェックは，実際に微分を遂行することで行われる）．この親公式を得るには，計算の後でゼロにするソース関数 $J(t), J(x)$ を導入する必要があるが，そのためには汎関数および汎関数微分の概念が必要になる．これらは付録 B で解説してある．この親公式は経路積分法によって簡単に得ることが出来るので付録 C に加えた．特に場の理論では親公式の有効性は絶大である．

場の理論への応用は，基礎にもふれながら最後の第 5 章で解説した．肝に銘じておかなければいけないことは，いかにファインマンダイアグラムが手軽であっても，その基となる計算手段が頭に入っていなければ何の意味もない．ここで，登場するウィック展開などの概念を理解した上で親公式をフルに使って計算を進めて欲しい．紙面の関係上，ユークリッドでの場の理論は扱うことが出来なかった．文献 [11] などを見て欲しい．

最後にこのような機会を与えていただいたサイエンス社編集部の皆さん，特に高橋良太さん，平勢耕介さんに感謝の言葉を述べさせていただきます．

**2018 年 10 月**

柏 太郎

# 目　次