

特集／固有値問題の探究

## 拡がる固有値問題の面白さ

廣川 真男

ここ数年いろいろな場面で‘Society 5.0’というキーワードを目にするようになった。これは第5期科学技術基本計画が謳う超スマート社会を実現する未来図で、第4次産業革命時代に日本が生き残るための方針とされ、数理科学が重要な役割を担い、数理科学への期待が高まっている。研究機関のみならず、日本経済団体連合会（略称、経団連）のPolicy（提言・報告書）にも、2016年11月15日の「Society 5.0実現に向けた政府研究開発投資の拡充を求める」に始まり2018年11月13日の「Society 5.0—ともに創造する未来—」が出るまでに、頻繁にSociety 5.0が出現する。特に2017年2月14日には「Society 5.0実現による日本再興～未来社会創造に向けた行動計画～」と提言がある。Society 5.0実現では、工学のような実学のみならず数理科学にも日本再興が託されている。

一方、日本再興を担う工学部の若人たちに基礎的な数学を教えていると、それを学ぶための彼らなりのモチベーションを見つけられず、「この数学を習う理由が見えない」と、目隠しされた状態で訳も分からずに前へ進むことを嫌う学生は少なくない。ここ数年、フーリエ解析の講義を担当していることもあり、サイエンス社から執筆する機会を頂いた。本誌2015年11月号<sup>1)</sup>には、工学においてフーリエ解析は欠かせないと書き、SGCライブラリ<sup>2)</sup>には、数物系の学生に向けて、本誌2012年5月号<sup>3)</sup>で紹介した量子ラビ模型をゴールに思うところを書いた。彼らはフーリエ解析の中で $\pi$ や $e$ という数学の魅惑的な定数を眼にする。そもそも

フーリエ変換は光の重ね合わせを数学として表現するので、これらの定数も物理的事情により出現してくる：光は平面波の重ね合わせであり、平面波の動きを表す波動関数は位相 $\theta$ の三角関数、‘我々の至宝’とも言われるオイラーの公式を通し $e^{i\theta}$ で表すことができる。従って、この関数が位相に対してもつ周期は $2\pi$ である。この位相 $\theta$ は、(長さ $2\pi$ 内の)波数 $k$ と位置 $x$ 、そして角振動数 $\omega$ と時間 $t$ を用いて、 $\theta = kx \pm \omega t$ となる。工学では $t = 0$ としてフーリエ変換を考える分野もあれば、 $x = 0$ とする分野もある。波長 $\lambda$ の逆数 $\kappa = \lambda^{-1}$  (単位長内の波数)と振動数 $\nu$ を用いて $\theta = 2\pi(\kappa x \pm \nu t)$ と取る分野もあろう。これに平面波の振幅を加味し、フーリエ変換の積分の前に現れる定数の値には $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ,  $\frac{1}{2\pi}$ ,  $1$ のようにいろいろ定義があるが、多くの数学の教科書にはこの説明がない。勉強熱心な工学部の学生が数学の教科書を何冊も読んだ際に混乱する要因の一つにもなっているようだ。物理学や工学等の実学では、変数や定数は物理学的・工学的な意味をもってくる。拡がる数学を標榜するためには、拡げたい対象の環境や文化に敬意を表し、数学側から‘ビジネスマッチング’しに行く必要があるのかもしれない。

ところで、文献<sup>2)</sup>では、フーリエ変換を通し正準量子化の概念を導入し、そこに演算子となった物理量の固有値問題を經由することで、この正準量子化の‘justification (正当化・弁明)’を紹介した。前置きが長くなったが、ここでようやく本号で特集する固有値問題が出て来た。固有値問題は線形代数で習うメインイベントの一つである。で