August 2019 MATHEMATICAL SCIENCES Number 674

発展する可積分系

高橋 大輔

可積分系とは，狭義には完全積分可能なハミルトン系ということになろう．自由度 N のハミルトン力学系に N 個の独立な保存量が存在するような場合である．常微分方程式の解を求めるとき，その方程式の微分の階数だけ積分を繰り返して求める，いわゆる求積法という解法がある．可積分系の積分という言葉は，微分方程式において積分によって微分の関係を紐解くという操作に合致した意味合いで用いられている．

ところがソリトン方程式の発見によって，無限次元力学系である非線形偏微分方程式に対しても可積分系という概念が拡張される．ここに至ると系が積分可能であるという本来の捉え方が狭義となり，可積分系がもたらす様々な成果が縦横無尽に連携し，線形でないとひとくくりにされた非線形系の果てしない領域に「解く」という熱望をもった探検が開始される．

しかしながら，歴史的経緯は数学的な道理の下で展開しない．人々が新しい物事を発見するとき，そのような道理はたいがい後付けである．例えば可積分系の主要な舞台となるソリトン方程式について，その歴史を振り返ろう．

まず，1834 年の Scott-Russell の孤立波の目撃をもってソリトン方程式の歴史が始まる．運河で急に止まったボートのへさきから発した水のうねりが，安定して 1, 2 マイルも伝播したという観察である．当時はこのような安定な孤立波が存在すること自体が論争となり，その議論はほぼ 60 年後の 1895 年に Korteweg と de Vries が提出した浅水波方程式，いわゆる Korteweg–de Vries (KdV) 方程式により決着を見る．

ところがこの方程式はその後注目されず，再び脚光を浴びるのに長年を要することになる．また，ここまでは流体力学における非線形波動の研究であり，可積分という概念は登場しない．その系譜とは別に 1950 年代初めになって Fermi, Pasta, Ulam による 3 次および 4 次の非線形相互作用を取り入れた 1 次元非調和振動子の数値実験が行われる．その結果，すべての波長にわたって振動のエネルギーが等分配されるはずであるという当時の非線形性に関する常識が覆され，エネルギーは長い波長の成分どうしのみでやりとりをし，振動の様子が有限の時間で元に戻るということが明らかとなる．そして，これに興味を持った Zabusky と Kruskal が振動子の連続体近似により KdV 方程式にたどり着き，数値計算により複数の孤立波が相互作用しながら安定して伝播し時間を経て初期値に再帰する様子を報告し，それら孤立波をソリトンと名付ける．

非線形な偏微分方程式でも解が秩序立った振舞いをするものがあるらしいという発見は，当時は大変新鮮だったであろう．その後，KdV 方程式の