

特集／素数の探究

素数のアイデアと描像

森下 昌紀

素数が数の素（根源）であることは誰しも認めることでしょう。アリストテレスによれば¹⁾、ピタゴラスは「万物は数の属性をもつ」と考えました。天体運動には音階を、音階には数の比を見て取りました。ピタゴラス学派の影響を受けた哲学者プラトンも数のアイデアに代表されるアイデア論に基づき、倫理学、形而上学、政治学その他あらゆる学問分野を展開しました²⁾。古代ギリシアでは、哲学は元来、智（ソフィア）を愛する（フィレイ）ことであり、数学を含むすべての学問分野の総体でした。以上を合わせますと、素数は、この世・あの世の万物、すべての学問の根源ということになるのでしょうか。

数学内の概念としても、素数は基本的、普遍的なものです。素何々という素数に類似する概念がいたるところに現れ、数論と対比した研究がなされています。このような横断的研究は、上で述べたように、むしろ古代、数学の始まりにおいて顕著でした³⁾。一人の人間と一羽の鳥の間に類似、共通する何か（存在）、それを普遍化したものが数の1であり、プラトンが1のアイデアと呼んだ所以です。

本特集では、古代ギリシアのアカデメイアのように、素数のアイデアがこの世に舞い降りた様々な姿を深く広く探究することにいたします。素数の様々な側面については各稿で明解に解説されていますので、ここで述べる必要はないでしょう。この稿では素数の描像の変遷を辿ることで一つの案

内とし、各稿へ繋げたいと思います。

素数の描像とは、素数たち P がどんな器 X に入っていると見るか、 P と X との相対的な描像を意味します。素数たちの性質の研究は、空間 X に適用可能な方法論と密接に関係しています：

$$\begin{cases} P = \{2, 3, 5, 7, \dots\} \subset X, \\ X \text{ 上の解析, 幾何など} \Rightarrow P \text{ の性質の研究.} \end{cases}$$

さらに、素数たちは X の中にバラバラに住んでいるのではなく、互いに緊密に関連し合っています。その相互作用を記述することは数論の主要な問題といえます。

歴史を振り返ることは研究にとってもしばしば有用なことがあります。新しい概念が実は古い時代にその根、芽をもっていたということもあります。素数の描像の観点から見ると、ギリシア時代に概念的なパラダイムシフトがあり、その後オイラーまで技術的進歩が続き、19、20世紀に再びパラダイムシフトがありました（ガウス、ガロア、デデキント、グロタンディーク等）。ピタゴラス学派は輪廻転生の信仰をもっていました。素数研究の歴史を辿りながら、

ピタゴラス → オイラー
(素数は無限個) (オイラー積)

アリストテレス → グロタンディーク
(トポス, カテゴリー論) (エタールサイト)

などと輪廻転生を空想してみるのも楽しいかもしれません。