まえがき

極小曲面論は，18 世紀の L. オイラーや J. ラグランジュによる研究から始まったとされている．実際に，ラグランジュは 3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ において関数 $z=\varphi(x,y)$ のグラフが面積最小となるとき，その関数は

$$(1+\varphi_y^2)\varphi_{xx}-2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy}+(1+\varphi_x^2)\varphi_{yy}=0$$

という偏微分方程式を満たすことを，オイラーは懸垂面（カテノイド）が面積最小曲面となることを発見した．また，J. B. M. C. ムーニエは，ラグランジュが発見した偏微分方程式が曲面の各点で主曲率の和がゼロとなる，つまり平均曲率が恒等的にゼロとなることと同値であることを示した．この事実から，平均曲率が恒等的にゼロとなる曲面を極小曲面と呼ぶようになり，微分幾何学を中心に活発に研究されるようになった．

19 世紀，J. A. F. プラトーは，閉じた針金の枠に張る石鹸膜は表面張力によって面積極小になることに注目し，極小曲面に関する数多くの実験を行った．このことから，空間内の与えられた単純閉曲線を境界とする極小曲面の存在を数学的に示す問題が「プラトー問題」と呼ばれ，その解決に多くの研究者の関心を集めた．「プラトー問題」は最終的に J. ダグラスと T. ラドーによって独立に解決され，ダグラスはこの業績により第 1 回のフィールズ賞を受賞した．以上のように極小曲面論は長い間研究されているが，その研究は今もなお進展し続けている．それは，アメリカ数学会が発刊している月刊誌 Notice の 2017 年 4 月号の J. ペレツによる記事のタイトル

A New Golden Age of Minimal Surfaces, Notices of AMS **64** (2017), no. 4, 347–358

からも感じ取ることができる．

極小曲面論の研究の発展を牽引してきた結果の 1 つとして，エネパー・ワイエルシュトラスの表現公式が挙げられる．エネパー・ワイエルシュトラスの表現公式とは，等温座標系を用いることで極小曲面のガウス写像が正則（反正則）写像になることに着目して，複素解析的データにより極小曲面を構成する公式のことである．この公式とコンピュータグラフィックスの技術の発達により，極小曲面の非自明な例が数多く発見されるようになった．また，この公式により，極小曲面論と他の数学の分野，特に複素解析学が結び付き，極小曲面の様々な幾何学的性質が発見されるようになった．

そこで本書は，極小曲面論の入門書として，ユークリッド空間の極小（超）曲面の基本的性質および極小曲面におけるエネパー・ワイエルシュトラスの表現公式とそれから得られる極小曲面の例や幾何学的性質を解説する．

本書の構成は次の通りである．第 1 章では，ユークリッド空間の極小（超）曲面の基本的性質を

解説する．第 1 節において，ユークリッド空間内の（超）曲面論を復習し，第 2 節，第 3 節において，超曲面の体積（曲面の面積）の第一，第二変分を計算し，平均曲率が恒等的にゼロとなる超曲面は境界を固定する変分について体積が極小であることを示す．第 4 節では，グラフ超曲面が極小超曲面であるときに満たす偏微分方程式を求め，第 5 節では，n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ （ただし $n \leq 7$ とする）全体で定義されるグラフ極小超曲面は超平面に限ることを主張するベルンシュタインの定理を，$n = 2$ の場合に限り証明する．第 6 節と第 7 節は $\mathbf{R}^3$ の極小曲面に話を限定して，第 6 節では極小曲面が実解析的であることを示し，さらに極小曲面の各点の近傍で等温座標系が存在することを示す．第 7 節では，極小曲面における回転面，線織面，移動曲面の分類を与える．

第 2 章では，極小曲面のエネパー・ワイエルシュトラスの表現公式を解説する．第 1 節では，共形はめ込みの一般論を紹介し，第 2 節ではリッチの定理という，与えられた 2 次元リーマン多様体が $\mathbf{R}^3$ の極小はめ込みとなるための必要十分条件を与える．第 3 節では，共形はめ込みのガウス写像を立体射影と合成して複素数値関数とみなし，ガウス写像が正則または反正則であるための必要十分条件を求める．第 4 節では，劔持の表現公式と呼ばれる，ガウス写像と高さ微分による共形はめ込みの表現公式を与え，それをもとに第 5 節では，本章の主要結果であるエネパー・ワイエルシュトラスの表現公式を紹介する．第 6 節では，随伴極小曲面と共役極小曲面の定義を与え，等長的な 2 つの極小曲面は互いに他の随伴極小曲面となることを主張するシュワルツの定理を証明する．第 7 節では，極小曲面の周期問題を取り上げ，周期問題を解くことで得られる極小曲面の例を紹介する．

第 3 章は「極小曲面の発展的話題」と題し，エネパー・ワイエルシュトラスの表現公式に関連した極小曲面の発展的な話題を紹介する．第 1 節では，完備極小曲面のガウス写像の除外値問題，特に重要な結果である藤本の定理とオッサーマンの定理を紹介する．第 2 節では，有限全曲率完備極小曲面の例として，コスタ・ホフマン・ミークスの極小曲面の構成方法を周期問題の解法を中心に紹介する．

線形微分方程式の解の存在と一意性や微分形式に関する結果など本書を読む際に有用となる結果の要約を第 4 章の「補遺」にまとめている．

本書は主に理工系の学部 4 年生および大学院生を対象として書かれている．従って，曲面論，複素解析学およびリーマン幾何学の基本事項が既知となって書かれている箇所もある．曲面論については [17]，[35]，[38] を，複素解析学は [6]，[21]，[39]，リーマン幾何学については [11]，[31] などの文献を適宜参照してほしい．また本書にある幾つかの結果については，証明を含め完全に理解するためには他の文献を確認する必要がある．参考文献を参照しながら本書を読んでもらいたい．

本書は，著者の一人である藤森が山形大学（2009 年度）と熊本大学（2011 年度）で行った集中講義，および岡山大学で行った講義のノートをもとに，著者たちが加筆，修正したものである．集中講義の際に有益なご助言をくださった井ノ口順一氏と安藤直也氏，ならびに講義ノートについて有益なご助言をくださった庄田敏宏氏と三石史人氏，および岡山大学大学院自然科学研究科博士前期課程の受講生に感謝の意を表す．また，「数理科学」編集部の大溝良平氏には計画から出版まで，平勢耕介氏には校正作業で大変お世話になった．この場を借りて厚くお礼を申し上げたい．

2018 年 10 月

著者

記号

- 本書では特に断りのない限り，関数や写像，多様体はすべて C^∞ 級とする．
- 第 1 章では，n 次元実多様体 M から $n+1$ 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n+1}$ へのはめ込みを扱う．多様体 M の局所座標系は主に $(u^1, \ldots, u^n)$ で表し，$\mathbf{R}^{n+1}$ の通常の直交座標系は $(x^1, \ldots, x^{n+1})$ で表す．また，添字の動く範囲は，$1 \leq i, j, k \leq n$，$1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \cdots \leq n+1$ とし，アインシュタインの既約に従って和の記号を省略する．
- 1 変数の関数や写像などの導関数は f'，φ'' などのようにプライムを付けて表す．
- n 変数の関数や写像などの偏導関数は

  $$f_i := \frac{\partial f}{\partial u^i}, \qquad \nu_{ij} := \frac{\partial^2 \nu}{\partial u^j \partial u^i}$$

  などと右下に微分する変数の番号を添えて表す．ただし，n^2 個の関数 g_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ の第 k 成分による偏微分を

  $$g_{ij,k} := \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$$

  といったように表す．$g_{ij,k}$ は通常の微分商であって，共変微分商ではないことに注意する．
- 第 1 章第 6 節以降では，2 次元実多様体（またはリーマン面，つまり 1 次元複素多様体）M から $\mathbf{R}^3$ へのはめ込みを扱う．多様体 M の局所座標系は主に (u, v)（M をリーマン面とみなしたときは $z = x + \sqrt{-1}y$）で表し，$\mathbf{R}^3$ の通常の直交座標系を (x^1, x^2, x^3) で表す．また，偏導関数は

  $$f_x := \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \nu_{z\bar{z}} := \frac{\partial^2 \nu}{\partial \bar{z} \partial z}$$

  などと右下に微分する変数を添えて表す．
- 虚数単位を添字の i と区別するため $\sqrt{-1}$ で表す．

目　次