まえがき

1989 年の秋頃，当時修士 2 年生であった筆者に柏原正樹先生が「この前のあれ “crystal base” という名前にしました.」と仰った．あれとは，その少し前に柏原先生から伺っていた話に登場する新しく定義された “あれ” のことであった．crystal base — "結晶基底"という名前に接した瞬間であった．それから，ほぼ 30 年（現在 2018 年夏，出版はおそらく 2019 年），結晶基底 30 歳．30 年のうちに結晶基底の理論は大きく発展し，その全体像はもはや掴みようのないところまで行ってしまった感がある．本書は 30 歳になる/なった結晶基底にまつわる話を私が絡んだものを中心にまとめたものである．あくまでも私家版という趣でお読み頂ければ幸いである．

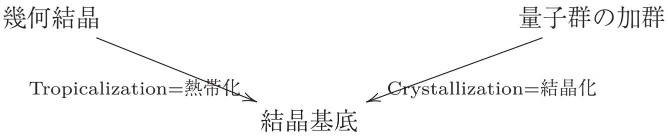
結晶基底の理論を簡単に説明してみる．まず，量子群とその表現論が結晶基底の話の根っこになる．量子群とは有理関数体 $\mathbb{Q}(q)$ 上定義された代数であり，リー代数の包絡環の所謂 q-類似として捉えられ，その表現，加群はやはり $\mathbb{Q}(q)$ 上定義される．大雑把にいうと結晶基底はここで，q を 0 とした加群や（部分）代数の $\mathbb{Q}$-基底として得られるものである．もちろん，これでは説明として乱暴すぎるし，そもそも数学的に正しいとは言えない．しかし，話としてはわかり易い．では，なぜ q を 0 にするのか? これも一言でいうと，色んな計算が簡単になるからである．表現論などで加群への代数の元の作用は通常，複雑な線型和で表され，計算が大変なことは珍しくない．しかし，結晶基底の理論においてこうした計算は大幅に簡単化される．しかも，q を 0 にしても元の情報はほとんど失われないのである．これは一見，夢物語のようにも思えるが現実である．こうした優れた性質のおかげで結晶基底は様々な分野に応用されることになった．リー代数や量子群の表現論のみならず数理物理や代数群の modular 表現論，組合せ論などである．特に，組合せ論への応用については本書においても多くのページを割いた部分である．ヤング図形，ヤング盤に関係する組合せ論には大きな威力を発揮した．その組合せ論への応用について重要な役割を果たすのがテンソル積についての性質である．量子群の 2 つの加群が結晶基底を持つとする．量子群はホップ代数の構造を持つので加群のテンソル積も量子群の加群となる．このテンソル積で得られる加群も結晶基底を持つということが結晶基底の大きな特徴となっている．詳しくは第 4 章に紹介してあるので，そちらをご覧頂きたい．特に，テンソル積の既約分解は表現論における基本的な問題の 1 つであり，古典的にはリトルウッド・リチャードソン規則として知られた分解則が有名である．第 5 章で紹介されるようにそうした古典的な規則が結晶基底の言葉によって翻訳されることは結晶基底の理論が古典的な理論の中に息付いていたことの証であると考えることもできるであろう．こうした非常に強力な結晶基底であるが，その存在が保証されなければ意味はない．存在を保証してくれるものが"grand loop"と呼ばれる 14 個の命題からなる帰納法による証明で第 8 章に紹介した．しかし，長く複雑な証明であるので，取り敢えず飛ばしてから必要があれば改めて読んでもよいかもしれない．

結晶基底の理論の重要な結果の 1 つが大域/標準基底の存在である．最近，話題の cluster 代数導入のきっかけになったりと重要な対象であるが，本書では割愛してしまったのは，少し悔やまれる．こちらに関しては，参考文献の [21], [22], [32], [33] などを参照してほしい．

結晶基底とともに，もう一つの主題である幾何結晶は現代数学で流行っている"tropical"な考え方を背景にした新しい理論と言える．大雑把に言うと，幾何結晶の理論は結晶基底の定義を"de-tropicalize"したものである．ここで，tropicalization (熱帯化) とは

$$x+y \longrightarrow \max/\min(x,y) \qquad x\cdot y \longrightarrow x+y \qquad \frac{x}{y} \longrightarrow x-y$$

によって positive=subtraction free="−"のない世界を区分線型的な世界に変換することである．この区分線型的な世界の代表が結晶基底でありその逆方向に幾何結晶の世界があると考える．この Berenstein-Kazhdan によって与えられた幾何結晶の理論の ‘すごい’ ところは，単に結晶基底の理論のアナロジーになっているだけでなく，tropicalization によって，函手的な対応が付いていることであろう．このことから，結晶基底には

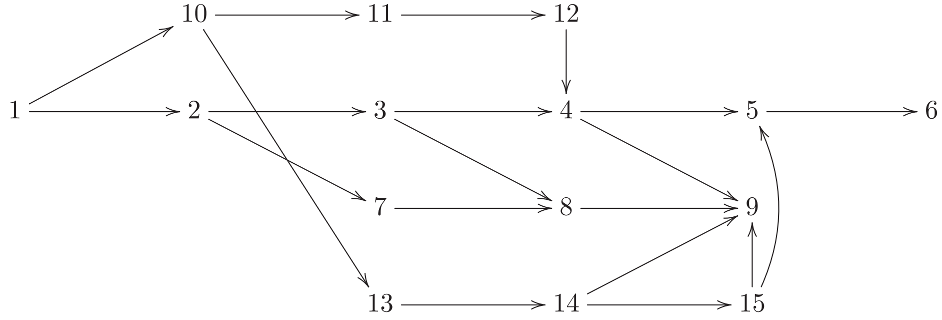


と 2 方向からの函手による対応があると考えられる．実際に結晶基底の理論で得られた公式が，幾何結晶での公式の tropicalization によって得られることがある．また，結晶化では得られない結晶（基底）が熱帯化によって得られることもある．

第 12 章で取り上げた幾何 R 写像については，量子群における R 行列，結晶基底における組み合わせ R と関係が深いが，まだまだ不明な点が多く研究の進展が望まれる．

本書を読むにあたって，なるべく予備知識は仮定しないつもりであったが，筆者の能力からして，それも叶わなかった．なるべく，新しい事柄には定義や簡単でも説明を付けるよう配慮したが，足りない点も多々あるので，そこは参考文献 [2], [9], [10], [13]～[15], [32] などを参考にしてもらいたい．

各章のつながりは大体次のようになるので参考にして頂きたい．



本書の内容は基本的には所謂 Kac-Moody setting で展開できるものである．特に，affine の場

合に結晶基底，幾何結晶ともに多くの興味深い例や対象があるのだが，本書では簡単のため半単純という設定に限定してある．Kac-Moody setting, 特に affine の場合を中心に興味をお持ちの場合は結晶基底ならば，文献 [17]～[19], [24], [26], [53], [54], 幾何結晶や (affine)Kac-Moody 群なら [28]～[30], [34], [35], [41], [42], [44], [56] などに当たられるようお願いしたい．

本書をパラパラとめくってみればわかるが，結構な分量の計算が載せてある．これは，結晶基底，幾何結晶の理論を理解するには避けて通れないことであってこの分野は，とにかく手を動かしてなんぼの部分が非常に大きいので本格的に取り組もうという方は是非，そうした計算は避けずにペンと計算用紙を傍らに演習問題にも触れつつ，お読み頂ければ幸いである．

2019 年 1 月

中島 俊樹

目　次