まえがき

近年，多様体の範疇を超えた空間の幾何学が活発に研究されている．その一つである**粗幾何学**（**coarse geometry**）は，空間を遠くから眺めたときに見えて来る，粗い構造に着目した研究である．例えば整数 $\mathbb{Z}$ と実数 $\mathbb{R}$ は局所的には全く異なる構造を持つが，両者を遠くから眺めてみれば，どちらも直線という同じ幾何構造が見えて来る．このような幾何学を考える動機として，幾何学的群論と非可換幾何学がある．

幾何学的群論

20 世紀初頭より，ロシアの数学者達によって組合せ論的な手法を用いた無限離散群の研究が進められた．同時期にデーンは曲面の基本群の「語の問題」を肯定的に解決したが，その手法は基本群が双曲平面に幾何学的に作用することに着目し，双曲平面の $4g$-角形によるタイル張りに帰着させるものだった．語の問題という代数的な問題を，双曲平面の持つ負曲率性に関連付けたのである．

こうした研究を背景にして，グロモフは幾何学的手法を前面に押し出した無限離散群の研究を提唱した．これが幾何学的群論の起こりである．曲面の基本群の場合には，双曲平面という良い空間への作用が予め備わっているが，一般の有限生成群の場合には，ケーリーグラフへの作用などを考察する必要がある．これらは本質的に離散的な距離空間であるから，そうした空間を扱う幾何学として粗幾何学が適切な舞台なのである．実際グロモフは距離空間に対して「負曲率を持つ」という概念を定式化し，双曲群の理論を創始した．その後双曲群論は急速に発展し，様々な結果をもたらした．さらに現在では曲率が 0 であるというべきものも含む，「非正曲率を持つ」空間とその対称性を表す群の研究が進んでいる．

非可換幾何学

非可換幾何学の主要な問題として，群の双対を理解する，というものがある．可換群の場合はポントリャーギン双対性により完全に理解される．そして非可換な場合を考察するために導入されたのが，群の分類空間の K ホモロジーと，群 C^* 環の K 理論との同型を主張するバウム・コンヌ予想である．この問題は作用素環の研究者によって研究が進められたが，ヒグソン・ロー及びユーにより，距離空間の「粗 K ホモロジー」と，距離空間から作られたロー代数と呼ばれる C^* 環の K 理論との同型を主張する粗バウム・コンヌ予想が定式化され，幾何学的な視点が導入された．驚くべきことに，群の代数構造から定まる距離空間に対する粗バウム・コンヌ予想から，元の群に対するバウム・コンヌ予想の単射性が導かれることが分かっている．

本書の構成

本書の主題は非正曲率空間の粗幾何学と粗バウム・コンヌ予想である．第 1 章では粗幾何学の基本的な概念であり，空間の「粗い構造」という概念の定式化である粗同値，擬等長同型などを導入する．また離散群に対してどのように距離を定めることにより，幾何学的な対象と見なすか詳しく解説する．さらに本書の後半で用いられる，粗ホモトピーの概念及び開錘の粗幾何学的な取り扱いについても解説する．最後に，距離空間の粗幾何学を反映するコンパクト化の一般論を述べる．第 2 章では距離空間の増大度について考察する．増大度は 2 つの距離空間を粗幾何学の意味で区別するための最も基本的な不変量である．第 3 章から第 6 章までは，粗幾何学的な観点からの負曲率空間及び非正曲率空間の理論を取り扱う．第 3 章ではグロモフ双曲空間の理論を概説する．双曲性の様々な同値な定義について述べたのちに，測地的グロモフ双曲空間においては，擬測地線は必ずその端点を結ぶ測地線の近くにある，ということを主張するモースの補題を証明する．これは双曲空間の最も重要な性質であり，現在でもこの性質に基づいた離散群の双曲性の研究が行われている．第 4 章ではグロモフ双曲空間の境界を構成する．グロモフ双曲空間の粗幾何学的な性質の多くが，この境界に引き継がれている．この事実の一端は第 6.3 節で粗凸空間の設定で述べる粗カルタン・アダマールの定理において垣間見ることができる．第 5 章では非正曲率リーマン多様体の距離空間への一般化である，CAT(0) 空間とブーゼマン空間を紹介する．また，非正曲率を持つ単体複体である，シストーリック複体も紹介する．これらは全て次章で解説する粗凸空間の重要な例である．第 6 章では筆者と尾國新一氏の共同研究により 2017 年に導入された，非正曲率リーマン多様体の概念の粗幾何学に於ける定式化の一つである，粗凸空間について解説する．この空間はブーゼマン空間が持つ距離関数の凸性を一般化したものであり，この空間のクラスは擬等長同型と直積の両方で閉じるという特徴を持つ．この粗凸空間に対して，カルタン・アダマールの定理の粗幾何学に於ける類似が成立することを解説する．第 7 章では粗幾何学に移植された代数的位相幾何学について解説する．一般粗ホモロジー論の公理とそこから導かれる性質について述べた後，位相空間に対するホモロジーを元にした粗ホモロジーの構成を解説する．第 8 章では粗幾何学と非可換幾何学が交差する粗バウム・コンヌ予想について，その定式化といくつかの場合の証明について解説する．第 9 章ではそれ以前の章で述べることができなかった，粗幾何学に於けるいくつかの話題について概説する．付録では本文を理解する上で必要となる距離空間の一般論，単体複体の理論，作用素環の K 理論，について概説する．

本書は学部生の読者にも分かりやすいようにできるだけ平易な記述を心掛けた．第 1 章から第 6 章までは一部を除き，距離空間の基本的な知識だけで理解できるようにしている．第 7 章では代数的位相幾何学，特にホモロジー論に親しんでいると理解の助けになる．第 8 章では作用素環の K 理論の知識があると望ましいが，必要となる事項は付録 C で解説している．また本書は読者の興味に応じて部分的に読むこともできる．各章の関連を表（次頁）にまとめておく．

本書の大部分は筆者が東北大学及び首都大学東京で行った大学院生向けの講義のために準備したノートに基づく．なお，粗幾何学の基礎概念に関しては筆者が大学院生の頃に塚本真輝氏と共同で行った，ローの著書[65]についてのセミナーの記録を参考にしている．またグロモフ双曲空間に関しては文献 [24] を，粗バウム・コンヌ予想に関することは文献 [37] を参考にしている．

表　各章の関連.

距離空間の増大度	$1 \to 2$
グロモフ双曲空間の理論	$1 \to 3 \to 4$
粗凸空間の理論	$1 \to (3, 4) \to (5) \to 6$
粗代数的位相幾何学と粗バウム・コンヌ予想	$1 \to 7 \to 8 \to (9)$

謝辞

見村万佐人氏には本書全般を通して有益な助言を多数頂いた．特に第 9 章の話題について，筆者の知識を補う的確な情報を補足して頂いた．田中亮吉氏には第 4 章について，読者の理解の助けに繋がる助言を頂いた．尾國新一氏には初稿に於けるいくつかの議論の細部を補足して頂いた．山内貴光氏は原稿全般を細部まで読んで下さり，表現の改善に繋がる多くの助言を下さった．松田能文氏からも表現の改善に繋がる助言を頂いた．「数理科学」編集部の大溝良平氏は，筆者が雑誌「数理科学」に寄稿した粗幾何学についての記事に興味を持ってくださり，本書の企画をして頂いた．以上の方々に深く感謝したい．

2019 年 5 月

深谷友宏

記号

本書を通して使用する記号を以下にまとめておく．

- $\mathbb{N}$ 自然数全体の集合．ただし 0 は含まない．
- $\mathbb{Z}$ 整数全体の集合．
- $\mathbb{Q}$ 有理数全体の集合．
- $\mathbb{R}$ 実数全体の集合．
- $\mathbb{C}$ 複素数全体の集合．
- $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.
- 実数 $x \in \mathbb{R}$ に対し，$\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$.
- 集合 S に対して，$\#S$ で S の濃度を表す．
- 集合 V に対し，$\mathfrak{P}(V)$ により，V の冪集合を表す．
- 距離空間 (X, d) に対し，以下のような記号を用いる．
  - 2 点 $x, y \in X$ に対し，$\overline{x, y}$ により x と y の距離 $d(x, y)$ を表す．
  - 点 $x \in X$ と正数 $r > 0$ に対し，x を中心とする半径 r の開球及び閉球を次で表す．
$$B(x; r) := \{y \in X : \overline{x, y} < r\}, \quad \bar{B}(x; r) := \{y \in X : \overline{x, y} \leq r\}.$$
  - 空ではない部分集合 $A \subset X$ と $R \geq 0$ に対し，$N(A; R)$ で A の R-閉近傍を表す．即ち
$$N(A; R) := \{x \in X : d(x, A) \leq R\}.$$

目　次