

# まえがき

理論物理の古来からの難問に、3次元 Ising 模型を解くという問題があります。そこで、本書では具体的なハミルトニアンを使わずに3次元臨界 Ising 模型を解く魔法を解説します。Ising 模型は統計物理学の模型なのだからハミルトニアンから分配関数ぐらいは計算するのでは？と思った方、すみません。分配関数も計算しません。3次元 Ising 模型はその2次相転移の臨界点において、ハミルトニアンを使うことなく理論が持つ対称性だけで解けてしまいます。少なくとも2019年現在、人類が知っている3次元臨界 Ising 模型の世界最高精度の臨界指数は、具体的なハミルトニアンを用いない方法で求まっています。それが、本書で議論したい共形場の理論とそれに基づく共形ブートストラップの方法です。個人的な感触では、3次元臨界 Ising 模型の臨界現象を理解するには「ハミルトニアンは死んだ」と言ってよいと思っています。

もちろん、この「ハミルトニアンは死んだ」という言葉は、理論物理学教程で有名な Landau が、具体的なハミルトニアンと摂動論に基づく強い相互作用の理論に対して述べた見解を引用したものです。残念ながら強い相互作用については Landau の予言は的外れでしたが、本書で紹介する3次元臨界 Ising 模型の解とこの言葉は無関係ではありません。それは、共形ブートストラップの開祖の一人である Polyakov がその論文のタイトルに「共形量子場理論へのハミルトニアンに基づかないアプローチ」としていることから明らかです。Polyakov が Landau に会ったのは理論ミニマムの一番最初の試験を受けた時だけであったといますが、それでも Landau の最後の弟子の1人と言ってもよいかもしれません。とにかく、Polyakov が打ちたてた（当時は解を求めるのは不可能だと思われた）無限次元の共形ブートストラップの方程式は、それから40年経った今、ある一定の物理的な仮定のもとで、3次元臨界 Ising 模型がほぼユニークな解であるということがわかってきています。これを解説するのが本書の目標です。

Landau の「ハミルトニアンは死んだ」という言葉は Landau 自身の生前最後の論文として、Pauli の追悼のために出版されています。本書を眺めた後で、是非もう一度振り返っていただければ嬉しいのですが、ここで、強い相互作用についての話題を省略しながら、その一部を、翻案・引用したいと思います<sup>[1]</sup>。「(局所的な相互作用に対する信頼は揺るぎのないものです。) というのは、特定のハミルトニアンを用いない場の理論の方法で得られた全ての結果は実験的に確かめられているようだからです。しかし、特定のハミルトニアンを用いる場の理論の方法は死んでいます。十分な敬意を払いながらではありますが、死者は埋葬してあげなければいけません。わたしたちは、ハミルトニアンの方法を用いない新しい理論の構築を模索しているところです。この新しい理論は開放端を持った新しいダイアグラムに基づく方法になるでしょう。そして、この方法の物理的な基礎はユニタリ性の条件と相互作用の局所性に置かれます。このような議論に沿った新しい理論の方程式が書き下されるのは遠くない将来でしょう。しかし、今度は、今までに理論物理学でこ

れまで起こった発展段階とは全く異なって、方程式を書き下すことは終わりではなく、理論を構築するための始まりにしか過ぎないことに注意しないといけません。これらの方程式の解を具体的に求める方法を学ぶことは難しい問題になるでしょう。現段階では理論に含まれている拘束条件をどれだけ勝手に選べるのかを予言することは不可能です。もしかしたら方程式には解が全く無いかもしれません。」

それから半世紀が経って、人類は（コンピュータの助けを借りて）3次元臨界 Ising 模型がこの新しい理論の解であることを見つけたのです。この新しい理論の方程式は、具体的なハミルトニアンに基づくことなく、Landau が言ったように、ユニタリ性と局所性、さらに Landau が予知していなかった最後のスパイスとして共形対称性を加えることで書き下されました。そして、この共形ブートストラップ方程式を書き下すことは新しい理論の構築の始まりになったのです。

3次元の臨界 Ising 模型の解を求めるのに具体的なハミルトニアンを用いる方法が筋が悪いと考える物理的な理由もあります。それは臨界現象の普遍性という、理論物理学の大きなテーマに関わります。臨界現象の普遍性については本文中でもう少し詳しく議論したいと思いますが、3次元臨界 Ising 模型の解は Ising 模型だけに現れるのではなく、気体・液体の相転移からゲージ場理論の閉じ込め転移まで、多くの臨界現象に普遍的に現れるということが知られています。もし、臨界現象の普遍性が3次元の臨界 Ising 模型で成り立っているとしたら、臨界現象の本質は具体的なハミルトニアンにあるはずがないわけです。むしろ、具体的なハミルトニアンを扱わない方法こそが臨界現象の本質を表していると言えます。

このように考えると、3次元臨界 Ising 模型は、もちろん Ising 模型の臨界点での振る舞いを記述するのですが、Ising 模型だと思わない方がよいようにすら感じます。つまりもっと普遍的な定義があるのでは？というわけです。そこで、わたしの一番好きな3次元臨界 Ising 模型の定義は、「量子重力的に矛盾のない最も小さな4次元の宇宙」です。「最も小さな」は「最も曲率大きい」に変えたほうが正確かもしれませんが、共形ブートストラップの知見によれば、これも3次元臨界 Ising 模型と全く等価であることがわかります。3次元臨界 Ising 模型よりも小さな4次元宇宙は存在しません。磁石を温めて相転移を起こすと最も小さい宇宙を創ることができるってなんだかワクワクしませんか？

3次元の臨界現象を4次元の宇宙と同一視する、この全く新しい臨界現象の見方の鍵となるのが反 de-Sitter 時空と共形場理論の対応で、これもまた Polyakov が開祖の1人でした。わたしが数年前に小耳に挟んだところでは、ご本人的には共形ブートストラップで3次元臨界 Ising 模型が解けたとは完全には納得していないようでしたが、臨界現象を共形場理論を使って理解する試みは着実に進歩しています。読者の皆様には、是非本書を通読した後でハミルトニアンは本当に死んだのか？ご自身の回答を出していただければと思います。

2019年4月

中山 優

# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>本書を読むにあたって</b>	<b>1</b>
1.1	Polyakov のインタビュー	4
1.2	本書の構成と予備知識	5
<b>第 2 章</b>	<b>共形対称性とは？</b>	<b>7</b>
2.1	はじめての共形対称性	7
2.2	Euclid 空間上の共形代数	11
<b>第 3 章</b>	<b>統計物理学と共形対称性</b>	<b>15</b>
3.1	臨界現象の普遍性	15
3.1.1	格子気体模型と Ising 模型	16
3.1.2	臨界指数と臨界現象の普遍性	17
3.1.3	連続極限と場の理論	19
3.2	くりこみ群とスケール不変性	21
3.2.1	くりこみ群方程式	21
3.2.2	くりこみ群の固定点の性質と臨界現象	22
3.3	なぜ場の「量子論」か？	24
<b>第 4 章</b>	<b>素粒子物理と共形対称性</b>	<b>26</b>
4.1	散乱行列の共形対称性	26
4.1.1	Haag-Lopuszanski-Sohnius の議論	27
4.1.2	共形不変な散乱行列から共形場理論へ	31
4.2	ツリーレベルの例	32
4.3	高エネルギー物理と共形対称性	34
<b>第 5 章</b>	<b>共形対称性と保存則</b>	<b>36</b>
5.1	場の変換性	36
5.2	共形対称性と保存則	38
5.2.1	共形対称性と Noether の定理	39
5.2.2	エネルギー運動量テンソルの改良	40
5.3	具体例：自由な Maxwell 理論	42

<b>第 6 章</b>	<b>Weyl 対称性と共形対称性</b>	<b>45</b>
6.1	Weyl 対称性とは？	45
6.2	Zumino の定理	46
6.2.1	Zumino の定理	47
6.2.2	エネルギー運動量テンソルによる議論	49
6.3	Weyl アノマリー	51
<b>第 7 章</b>	<b>演算子と状態</b>	<b>53</b>
7.1	局所演算子と共形変換	53
7.1.1	局所演算子と共形変換の生成子の交換関係	53
7.1.2	共形代数	55
7.2	2つの状態空間	57
7.2.1	Minkowski 時空上での状態空間	58
7.2.2	Wick 回転と再構築定理	59
7.2.3	シリンダー時空上での共形場理論	60
7.2.4	状態・演算子対応	64
7.2.5	鏡映と時間反転	66
7.3	共形場理論の基本的な性質	66
<b>第 8 章</b>	<b>相関関数</b>	<b>70</b>
8.1	スカラー演算子の相関関数	70
8.1.1	共形不変な 1 点関数・2 点関数	71
8.1.2	共形不変な 3 点関数	73
8.1.3	共形不変な 4 点関数	75
8.2	テンソル演算子の相関関数	75
<b>第 9 章</b>	<b>自由スカラー場</b>	<b>79</b>
9.1	古典自由スカラー場と共形対称性	79
9.2	Minkowski 時空での量子化と相関関数	81
9.3	シリンダー時空での量子化	83
<b>第 10 章</b>	<b>空間埋め込み法</b>	<b>85</b>
10.1	高次元への埋め込み	85
10.1.1	空間埋め込み法	86
10.1.2	光円錐上での場の理論	87
10.2	例 1: スカラー相関関数	89
10.3	例 2: テンソル相関関数	91

<b>第 11 章</b>	<b>共形代数の表現論</b>	<b>94</b>
11.1	最低ウェイト表現と特異ベクトル	94
11.1.1	共形代数の表現	95
11.1.2	特異ベクトルの構成	96
11.2	ユニタリ性とユニタリティバウンド	99
11.2.1	ユニタリティバウンドの例	99
11.2.2	ユニタリティバウンドの物理的な応用	101
11.3	共形幾何との関係	102
<b>第 12 章</b>	<b>演算子積展開</b>	<b>104</b>
12.1	演算子積展開の一般論	104
12.1.1	共形場理論における演算子積展開の証明	104
12.1.2	共形場理論における演算子積展開の具体的な形	105
12.1.3	任意の相関関数の計算	107
12.2	応用：共形摂動論と Wilson-Fisher 固定点	108
12.2.1	Wilson-Fisher 固定点の例	110
12.2.2	共形対称性とくりこみ群の固定点の関係	111
<b>第 13 章</b>	<b>共形ブロック</b>	<b>113</b>
13.1	定義と基本的性質	113
13.2	演算子形式	116
13.2.1	共形ブロックのシリンダー時空での解釈	117
13.2.2	共形ブロックの $\rho$ 展開の性質	118
13.3	漸化関係式の方法と有理式近似	120
13.3.1	共形ブロックの解析的な性質	120
13.3.2	共形ブロックの極と漸化関係式	121
13.3.3	漸化関係式から従う共形ブロックの基本的な性質	123
13.4	共形 Casimir 方程式	124
<b>第 14 章</b>	<b>共形ブートストラップ 1</b>	<b>127</b>
14.1	交差対称性と共形ブートストラップ	127
14.1.1	4 点関数の交差対称性	127
14.1.2	自由スカラー場の例	129
14.2	解析的な性質と簡単な応用	130
14.2.1	解析的な応用 1：無限個のプライマリー演算子の存在	130
14.2.2	解析的な応用 2：共形次元の制限	131
14.3	共形データを調べる物理的な動機	133
14.3.1	共形次元の制限	134

14.3.2	演算子積展開係数の制限	136
<b>第 15 章</b>	<b>共形ブートストラップ 2</b>	<b>137</b>
15.1	半正定値計画問題への書き換え	137
15.1.1	半正定値計画問題	137
15.1.2	共形ブートストラップの半正定値計画問題への書き換え	138
15.1.3	有理式近似	139
15.1.4	コンピュータ上での有限の打ち切りと誤差	141
15.2	数値的な実装と結果	141
15.2.1	数値計算結果	142
15.2.2	キングの存在についての議論	144
15.3	連立共形ブートストラップと 3 次元臨界 Ising 模型の解	145
15.3.1	連立共形ブートストラップ方程式	146
15.3.2	半正定値計画問題への書き換え	147
15.3.3	数値計算の結果と議論	148
<b>第 16 章</b>	<b>今後の展望</b>	<b>152</b>
<b>付録 A</b>	<b>運動量空間・Mellin 空間</b>	<b>155</b>
A.1	運動量表示	155
A.2	Mellin 表示	156
<b>付録 B</b>	<b>Lorentz 領域での共形場理論とブートストラップ</b>	<b>158</b>
B.1	$a$ -定理	158
B.2	演算子積展開演算子に現れる高いスピンの演算子の構造	159
B.3	高いスピンのカレント保存則	159
B.4	平均化されたナルエネルギー条件 (Averaged Null Energy Condition: ANEC)	159
B.5	共形加速器理論	160
B.6	量子情報理論との関係	160
	<b>参考文献</b>	<b>161</b>
	<b>索引</b>	<b>166</b>