まえがき

理論物理の古来からの難問に，3 次元 Ising 模型を解くという問題があります．そこで，本書では具体的なハミルトニアンを使わずに 3 次元臨界 Ising 模型を解く魔法を解説します．Ising 模型は統計物理学の模型なのだからハミルトニアンから分配関数ぐらいは計算するのでは？と思った方，すみません．分配関数も計算しません．3 次元 Ising 模型はその 2 次相転移の臨界点において，ハミルトニアンを使うことなく理論が持つ対称性だけで解けてしまいます．少なくとも 2019 年現在，人類が知っている 3 次元臨界 Ising 模型の世界最高精度の臨界指数は，具体的なハミルトニアンを用いない方法で求まっています．それが，本書で議論したい共形場の理論とそれに基づく共形ブートストラップの方法です．個人的な感触では，3 次元臨界 Ising 模型の臨界現象を理解するのには「ハミルトニアンは死んだ」と言ってよいと思っています．

もちろん，この「ハミルトニアンは死んだ」という言葉は，理論物理学教程で有名な Landau が，具体的なハミルトニアンと摂動論に基づく強い相互作用の理論に対して述べた見解を引用したものです．残念ながら強い相互作用については Landau の予言は的外れでしたが，本書で紹介する 3 次元臨界 Ising 模型の解とこの言葉は無関係ではありません．それは，共形ブートストラップの開祖の一人である Polyakov がその論文のタイトルに「共形量子場理論へのハミルトニアンに基づかないアプローチ」としていることから明らかです．Polyakov が Landau に会ったのは理論ミニマムの一番最初の試験を受けた時だけであったといいますが，それでも Landau の最後の弟子の 1 人と言ってもよいかもしれません．とにかく，Polyakov が打ちたてた（当時は解を求めるのは不可能だと思われた）無限次元の共形ブートストラップの方程式は，それから 40 年経った今，ある一定の物理的な仮定のもとで，3 次元臨界 Ising 模型がほぼユニークな解であるということがわかってきています．これを解説するのが本書の目標です．

Landau の「ハミルトニアンは死んだ」という言葉は Landau 自身の生前最後の論文として，Pauli の追悼のために出版されています．本書を眺めた後で，是非もう一度振り返ってみていただければ嬉しいのですが，ここで，強い相互作用についての話題を省略しながら，その一部を，翻案・引用したいと思います[1]．「（局所的な相互作用に対する信頼は揺るぎのないものです．）というのは，特定のハミルトニアンを用いない場の理論の方法で得られた全ての結果は実験的に確かめられているようだからです．しかし，特定のハミルトニアンを用いる場の理論の方法は死んでいます．十分な敬意を払いながらではありますが，死者は埋葬してあげなければいけません．わたしたちは，ハミルトニアンの方法を用いない新しい理論の構築を模索しているところです．この新しい理論は開放端を持った新しいダイアグラムに基づく方法になるでしょう．そして，この方法の物理的な基礎はユニタリ性の条件と相互作用の局所性に置かれます．このような議論に沿った新しい理論の方程式が書き下されるのは遠くない将来でしょう．しかし，今度は，今までに理論物理学でこ

れまで起こった発展段階とは全く異なって，方程式を書き下すことは終わりではなく，理論を構築するための始まりにしか過ぎないことに注意しないといけません．これらの方程式の解を具体的に求める方法を学ぶことは難しい問題になるでしょう．現段階では理論に含まれている拘束条件をどれだけ勝手に選べるのかを予言することは不可能です．もしかしたら方程式には解が全く無いかもしれません.」

それから半世紀が経って，人類は（コンピュータの助けを借りて）3 次元臨界 Ising 模型がこの新しい理論の解であることを見つけたのです．この新しい理論の方程式は，具体的なハミルトニアンに基づくことなく，Landau が言ったように，ユニタリ性と局所性，さらに Landau が予知していなかった最後のスパイスとして共形対称性を加えることで書き下されました．そして，この共形ブートストラップ方程式を書き下すことは新しい理論の構築の始まりになったのです．

3 次元の臨界 Ising 模型の解を求めるのに具体的なハミルトニアンを用いる方法が筋が悪いと考える物理的な理由もあります．それは臨界現象の普遍性という，理論物理学の大きなテーマに関わります．臨界現象の普遍性については本文中でもう少し詳しく議論したいと思いますが，3 次元臨界 Ising 模型の解は Ising 模型だけに現れるのではなく，気体・液体の相転移からゲージ場理論の閉じ込め転移まで，多くの臨界現象に普遍的に現れるということが知られています．もし，臨界現象の普遍性が 3 次元の臨界 Ising 模型で成り立っているとしたら，臨界現象の本質は具体的なハミルトニアンにあるはずがないわけです．むしろ，具体的なハミルトニアンを扱わない方法こそが臨界現象の本質を表していると言えます．

このように考えると，3 次元臨界 Ising 模型は，もちろん Ising 模型の臨界点での振る舞いを記述するのですが，Ising 模型だと思わない方がよいようにすら感じます．つまりもっと普遍的な定義があるのでは？というわけです．そこで，わたしの一番好きな 3 次元臨界 Ising 模型の定義は，「量子重力的に矛盾のない最も小さな 4 次元の宇宙」です．「最も小さな」は「最も曲率が大きい」に変えたほうが正確かもしれませんが，共形ブートストラップの知見によれば，これも 3 次元臨界 Ising 模型と全く等価であることがわかります．3 次元臨界 Ising 模型よりも小さな 4 次元宇宙は存在しません．磁石を温めて相転移を起こすと最も小さい宇宙を創ることができるってなんだかワクワクしませんか？

3 次元の臨界現象を 4 次元の宇宙と同一視する，この全く新しい臨界現象の見方の鍵となるのが反 de-Sitter 時空と共形場理論の対応で，これもまた Polyakov が開祖の 1 人でした．わたしが数年前に小耳に挟んだところでは，ご本人的には共形ブートストラップで 3 次元臨界 Ising 模型が解けたとは完全には納得していないようでしたが．臨界現象を共形場理論を使って理解する試みは着実に進歩しています．読者の皆様には，是非本書を通読した後でハミルトニアンは本当に死んだのか？ご自身の回答を出していただければと思います．

2019 年 4 月

中山 優

目　次