まえがき

圏論は，多元環の表現論においても実に多様な用いられ方をしている．多くの圏，関手，自然変換が登場し，圏論の一般論も用いられる．例えば，そもそも，多元環 A 自身が対象を 1 つ持つだけの線形圏と見られ，A からその加群圏 $\mathrm{Mod}\,A$，安定加群圏 $\underline{\mathrm{Mod}}A$，導来圏 $\mathscr{D}(\mathrm{Mod}\,A)$ などが定義されアーベル圏や三角圏の理論が適用される．他にも余代数上の余加群圏，微分次数圏，A_∞ 圏，2-圏，$(\infty,1)$-圏なども登場する．本書では 2-圏および随伴系が多用される 2-圏論的被覆理論に焦点をあてて解説を行う．以下，G を群，$\Bbbk$ を体とする．

被覆理論

Gabriel[21], Riedtmann[37], Bongartz–Gabriel[14] によって，多元環の表現論に被覆理論が導入され，そのクイバーの中に有向サイクルを含む，取り扱いにくい多元環の表現を，より少ない有向サイクルしか含まない多元環，圏の表現に帰着する方法が与えられた．これにより特に，有向サイクルをたくさん含む多元環の代表である，自己入射多元環の研究が大きく進展した（例えば [38], [39]）．論文 [21] では最初に，一般的な被覆関手が定義されるが，実用上重要なのは，ガロア被覆である．これは本質的に，群 G の作用を持つ圏 $\mathscr{C}$ からその軌道圏 $\mathscr{C}/G$ への自然な被覆関手 $\mathscr{C} \to \mathscr{C}/G$ で与えられる．

多元環 A からその被覆 $\mathscr{C}$，つまり $\mathscr{C}/G \cong A$ となる圏 $\mathscr{C}$ を求める方法はいくつかある．自己入射多元環では $\mathscr{C}$ が多くの場合，別のずっと扱いやすい多元環の反復圏 (Hughes–Waschbüsch[27]) とよばれる圏によって与えられる．一般の場合には，多元環 A をクイバーと（極小）関係式で表示し，その表示から，“普遍” 被覆*1) $\tilde{A}$ を構成する方法を用いることができる（Waschbüsch[42], Martinez-Villa–de la Peña[32]）．その他の被覆 $\mathscr{C}$ はこの普遍被覆のある群 H による軌道圏 $\tilde{A}/H$ として得られる．上の場合も含む最も一般的な方法として，多元環 A に G-次数を付け，それと G とのスマッシュ積をとることによって被覆 $\mathscr{C} := A\#G$ を作る方法 (E. Green[23], Cibils–Marcos[17]) がある．本書では，この最後の構成法を解説する．

第 2 章の後半で，多元環をクイバーという図形で構成する方法を解説する．この構成を見れば，多元環の被覆は図形の被覆を代数化したものであることが分かる．被覆を定義するクイバーは，頂点を無限個持つ場合が多く，その場合には多元環の被覆は単位元を持たない多元環になる．そのような多元環は普通，線形圏として取り扱うので，考える範囲を線形圏に拡げておく．第 3 章で Gabriel による古典的な被覆理論を概観し，第 5 章，第 7 章で応用上障害となる仮定を取り除いて

*1） ただし，普遍とは言っても，この $\tilde{A}$ は A の表示の仕方によって変わりうる．

改良した被覆理論 ([5] [7]) を紹介する．その際，自然同型の族および 2-圏論的考察が必要になる．特に第 5 章では軌道圏をとる操作と，スマッシュ積をとる操作を，互いに 2-擬逆となる 2-同値に拡張する．

群の擬作用

本書では，中心となる第 5 章において，群の圏への作用として擬作用に一般化した形で論ずる．作用ではなく擬作用の方を採用したのは，次のいくつかの理由による．(1) 実際に群 G を圏 $\mathscr{C}$ に作用させるとき，G の元 a は $\mathscr{C}$ の同型として作用するのではなく，多くの場合 $\mathscr{C}$ の同値 F として作用する．すなわち，F には逆がなく擬逆 F^- しかないときが多い: $\mathbb{1}_{\mathscr{C}} \cong F^- \circ F \neq \mathbb{1}_{\mathscr{C}}$．このとき，$X(a) := F, X(a^{-1}) := F^-$ となる G の $\mathscr{C}$ への作用 X は存在しない．実際，存在したとすると，$X(a^{-1}a) = X(a^{-1}) \circ X(a)$ が成り立たなければならないが，左辺は $X(1) = \mathbb{1}_{\mathscr{C}}$ であり，右辺は $F^- \circ F \neq \mathbb{1}_{\mathscr{C}}$ となって矛盾が起こるからである．ところが，G が a で生成される巡回群であるときは，これを満たす擬作用は存在する（命題 5.4.15 参照）．少なくとも擬作用 X においては各 $X(a)$ $(a \in G)$ は必然的に $\mathscr{C}$ の同値になるが，同型である必要はない．(2) 擬作用が Deligne 等によって定義されているが，これが擬関手の特殊な例となっていることを指摘したものがないように思われる．本書ではこの関係も詳しく論じておいた．(3) これにより，群の擬作用が簡単な擬関手（弱関手，余弱関手）の例と見なせるため，この擬作用に慣れておくと後々，擬関手や弱関手が理解しやすくなる．(4) この形でコーエン・モンゴメリー双対を 2-圏化しておくと，群の擬作用を作用に変形する厳格化を与えることができる．(5) 群作用の方が，理論が簡単になり，結局は厳格化で群作用に帰着できるので，多くの論文等では，議論を群作用にとどめる傾向がある．そのため，擬作用を扱った議論に触れる機会は少ないように思われる．以上の理由により，論文としてはまだ未発表ではあるが，擬作用の方を採用した．

各章の内容

次に各章の内容について述べる．第 1 章では，圏，関手，自然変換など圏論の基本的用語を定義し，同時に，積，余積，核，余核など圏論での基礎的概念を解説する．項数の関係で極限，余極限に関する基礎的解説は他書に譲り必要最小限の解説にとどめた．次に多元環，線形圏を定義し，多元環自身が線形圏と見なせることについて解説する．

第 2 章では，まず多元環の表現を考えることと，その加群を考えることとは同値であることを解説する．この結果を踏まえて，線形圏の加群は，最初からその表現として定義する．多元環 A が線形圏 $\mathscr{C}$ として見られるとき，A の加群圏と，$\mathscr{C}$ の加群圏が同値であることを示す．最後にクイバーを用いて多元環および線形圏を構成する方法について解説し，制限クイバーの表現圏と対応する線形圏の加群圏とが同型であることを示す．

第 3 章では，多元環を線形圏と見なす必要が起こる状況として被覆を紹介し，多元環の表現論において古典的な被覆理論を概観する．多元環 A の加群圏 $\operatorname{Mod} A$ を研究する際，A の基本多元環（定義 2.3.18 参照）とよばれる多元環 B をとると，$\operatorname{Mod} A$ と $\operatorname{Mod} B$ とは圏として同じもの（圏

の同値）となるため，A の代わりに B をとることができる．このとき，圏として B は**骨格的**（**基本的**ともよばれる）である．すなわち，その圏では異なる対象は互いに非同型である，という条件が成り立っている．この条件のお陰で，多元環の被覆理論では関手間の等式で理論を進めることができていた．しかし，骨格的でない一般の圏（特に加群圏や導来圏）について被覆理論を構築する場合，関手間の等式は自然同値（あるいは自然変換）に置き換えなければならなくなり，2-圏論的な考察がどうしても必要になる．

第 4 章では，そのために必要な 2-圏論について基礎的な事項をまとめた．特に，2-射の垂直合成と水平合成を的確に区別し，交替法則を無意識に視覚的に使えるように，ストリング図を導入した．以降の解説では，2-射に関する証明はできるだけストリング図を用いて行うことにした．対象や 1-射もストリング図で扱う方法も紹介し，これを実際に随伴系の解説で用いた．ストリング図を詳しく実際に使って解説している書籍はあまり見たことがないので，この点は本書の 1 つの特徴となる．第 5 章の準備のため，修正射を用いる 2-同値の定義まで解説する．

第 5 章では，古典的な被覆理論を，2-圏論を用いて一般化し，コーエン・モンゴメリー双対の 2-圏論的一般論を展開する．もとになった論文 [7] では，群作用を持つ線形圏のなす 2-圏と群次数付き線形圏のなす 2-圏との間の 2-同値を証明していたが，本書ではこれを拡張して，群擬作用を持つ線形圏のなす 2-圏と群次数付き線形圏のなす 2-圏との間の 2-同値を証明した．ここで最も重要なことは，群作用を扱う [7] でのときと同様に，この 2-同値を証明するためには次数保存関手の定義を普通のものよりも弱める必要がある，ということである．この結果を用いると，群擬作用を持つ圏を，（自由な）群作用を持つ圏に同変同値変形することができる．また，群次数付き圏の間の次数保存関手を厳格な次数保存関手に斉次同値変形することもできる．

第 6 章では，理論的に定義された軌道圏およびスマッシュ積を実際に計算する方法を与える．ただし，ここでは群の作用は一般の擬作用ではなく通常の作用に限った．

第 7 章では，被覆する圏 $\mathscr{C}$ と被覆される圏 $\mathscr{C}/G$ それぞれの加群圏の間の関係を調べる．このための主な道具は被覆を与える関手 $P\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}/G$ から定義される，押し下げ関手 $P_{\bullet}\colon \operatorname{Mod}\mathscr{C} \to \operatorname{Mod}\mathscr{C}/G$ である．これは自然に定義される引き上げ関手 $P^{\bullet}\colon \operatorname{Mod}\mathscr{C}/G \to \operatorname{Mod}\mathscr{C}, M \mapsto M \circ P^{\mathrm{op}}$ $(M \in (\operatorname{Mod}\mathscr{C}/G)_0)$ の左随伴として定義される．この左随伴は小圏上のテンソル積として構成できるため，ここで一般に小圏上のテンソル積の一意存在性について解説しておいた．この事実は付録において軽度の圏上のテンソル積にまで拡張する．また，押し下げ関手が有限生成加群の圏の間に前被覆関手を導くことを証明する．この事実が被覆理論を表現論に応用する際の重要なポイントとなる．

第 8 章では，これまで群の作用（擬作用）しか考えていなかった被覆理論を，圏の（余）弱作用に拡張する方法について概略を述べる（[8], [9]）．

圏論の基礎のための集合論

最後に本書で採用した，圏論の基礎のための集合論について述べておく．集合論の公理系にはいろいろなものが提唱されているが，ここでは ZFC を採用する．また，集合全体のなすクラスを SET で表す．群 G からの作用を持つ線形圏の集まり $\mathbf{C}_0$ を対象の全体とする 2-圏 $\mathbf{C}$ と，G 次数線

形圏の集まり $\mathbf{D}_0$ を対象の全体とする 2-圏 $\mathbf{D}$ の間に 2-関手を与えることが本書の主要なテーマであるが，集まり $\mathbf{C}_0$ と $\mathbf{D}_0$ としては，どちらもできるだけ広くとっておくことが望ましい．しかし本書を書くまでは，どの程度まで広くしてよいのかよく分からなかった．その場合は，集合論のパラドックスが生じないように，小圏の全体までに押さえておくのが無難であるので，その設定で理論を構成した．しかし例え小圏 $\mathscr{C}$ から出発しても，その加群圏 $\mathrm{Mod}\,\mathscr{C}$ はもはや小圏にならず，この設定では $\mathrm{Mod}\,\mathscr{C}$ が扱えなくなってしまう．

宇宙

さて，小集合という用語には，2 通りの解釈がある．すなわち，クラス SET の元を小集合という場合と，$\mathbb{N}$ を元に持つ（グロタンディーク）宇宙という集合 $\mathfrak{U}$ を 1 つ固定して，その元を小集合（正確には $\mathfrak{U}$-小集合）という場合がある．この場合，$\mathfrak{U}$ の部分集合は $\mathfrak{U}$-クラスとよばれる．$\mathfrak{U}$-クラスでさえ SET の元であることに注意する．最初は前者を想定していたが，本書では，後者を採用することにした．この場合，圏 $\mathscr{C}$ は，その対象集合 $\mathscr{C}_0$ およびどの $x, y \in \mathscr{C}_0$ に対しても局所射集合 $\mathscr{C}(x, y)$ が $\mathfrak{U}$-小集合となっているとき，**$\mathfrak{U}$-小圏**とよばれる．また，$\mathscr{C}_0$ が $\mathfrak{U}$-クラス，$\mathscr{C}(x, y)$ が $\mathfrak{U}$-小集合 $(\forall x, y \in \mathscr{C}_0)$ となるとき，**$\mathfrak{U}$-軽度の**圏 (light category) とよばれる．これが普通に扱う圏である．これにより，集合より大きなクラスは扱えなくなるが，安心して SET の範囲内で理論を構築でき，十分に豊富な現象を取り扱うことができる．ここでさらに，どんな集合を与えてもそれを元とする宇宙が存在する，という**宇宙公理**も仮定する．この公理は ZFC とは独立していることが知られている．この立場に立ったとき，上の加群圏 $\mathrm{Mod}\,\mathscr{C}$ も扱いたければ，$\mathrm{Mod}\,\mathscr{C}$ の対象集合*2) を元に持つ宇宙 $\mathfrak{U}'$ にまで $\mathfrak{U}$ を拡大すれば，$\mathrm{Mod}\,\mathscr{C}$ は $\mathfrak{U}'$-小圏となり，それが可能になる．差し当たってはこの方法で扱えるようになる．しかしこのように宇宙の拡大を許すと，例えば $\mathrm{Mod}(\mathrm{Mod}\,\mathscr{C})$ を考えるときにまた拡大が必要になり，際限なく拡大することが必要になる．このように扱う集合が “ほんの少し” 大きくなるだけで宇宙を拡大し，どの宇宙での小集合であるかをつねに意識しなければならなくなる．可能ならば，宇宙 $\mathfrak{U}$ を 1 つ固定しそれを基準として，構成しようとしているものが SET 内に収まっている，ということが保証できれば便利である．以下，$\mathfrak{U}$ は固定するので，“$\mathfrak{U}$-” を省略して書く．

Levy の階層

よい方法を探しているとき，Levy[29] によって定義された k-クラス $(0 \le k \in \mathbb{Z})$ による SET の階層を用いる方法が見つかった．これは単なるプレプリントで証明は全く書かれていないため，すべて検証を行った．ほとんどが簡単に確認できるものであったが，そこで用いる ΨA が SET の範囲内でその存在が証明できるかどうかは本質的な点であった．その証明は暗に Knaster-Tarski の定理を用いるように書かれている．しかし，この定理が適用できる設定にはなっていないので，単純に適用はできない．この ΨA の存在証明は慎重に行った．その際，宇宙公理を本格的に使うことになった．最初は，自然数全体 $\mathbb{N}$ を含む宇宙の存在だけを仮定するつもりであったが．こうして検証が終わったので，これを本書の圏論の基礎とすることにした．この点も本書の 1 つの特色となる．

---

*2） $\mathscr{C}$ が $\mathfrak{U}$-小圏のとき，これは $\mathfrak{U}$-クラスになっている．

これによって，考えている圏がどの程度（適度とよぶ）の圏であるか計算することができ，つねに SET の範囲内で理論を構成することができるようになった．これは非常に便利である．例えば，上にも述べたように，軽度の圏上でもテンソル積の一意存在性が証明できる（付録 A.6）．同じ議論で適度 k (≥ 1) の圏の上でも同様のことが証明できるはずである．本書では，これらの内容を付録にまとめ，随時参照するようにした．軽度の圏の全体を対象集合，それらの間の関手の全体を射集合とする圏は適度 2（2-moderate）の圏となり軽度の圏にはならないので，定義が可能である（安心して使用できる）ことが分かる．この圏にさらに，これに属する関手の間の自然変換の全体を 2-射の全体として追加することにより 2-圏 **CAT** が定義できる．同様に，軽度の $\Bbbk$-線形圏と $\Bbbk$-線形関手の 2-圏 $\Bbbk$-**CAT** も定義できる．これで，線形小圏全体のなす 2-圏 $\Bbbk$-**Cat** しか扱えなかった最初の頃と比べて，遙かに自由になり，$\mathbf{C}_0$ と $\mathbf{D}_0$ の両方に軽度の線形圏の全体を含めることもできるようになった[*3)]（注意 5.8.15 参照）．これによって，擬 G-圏の定義もすっきりしたものになった．

謝辞

原稿に対して有益なコメントと多くの誤植をご指摘いただいた中岡宏行氏と，集合論に関する付録の原稿に対してご意見をいただいた依岡輝幸氏の両氏に感謝の意を表したい．執筆の際，執筆しやすいように配慮してくれた家族には，心から感謝したい．また，原稿の執筆中に他界した義父，戸崎昭二郎に本書を捧げる．最後に，本書を執筆するようお勧めいただき，完成まで辛抱強くお待ちいただいた，サイエンス社「数理科学」編集部の大溝良平氏および校正段階での大きな修正にもかかわらず丁寧に校正いただいた平勢耕介氏に感謝の意を表したい．

2019 年 10 月

浅芝 秀人

*3)　もちろん，もっと大きくして（ある $k \geq 1$ を固定して）適度 k の線形圏の全体も含めることができる．

目　次