SGC ライブラリ-89

弦理論の代数的基礎

環・加群・圏から位相的弦理論，ミラー対称性へ

髙橋　篤史　著

サイエンス社

まえがき

本書は，2007 年度後期および 2011 年度前期に大阪大学で数学専攻および物理学専攻の大学院生向けに行った講義の準備ノートに加筆・修正を行い，位相的弦理論の代数学的側面に関する入門書としたものである．これから位相的弦理論やミラー対称性を勉強・研究する際に不可欠な基礎となるであろうと著者が考える定義や定理をまとめた．読むにあたって必要な基礎知識はできる限り少なくしたつもりである．しかしながら，紙数の制限もあり，多くの重要な内容を省略し，かなりの命題の証明を演習問題とせざるを得なくなってしまった．ちなみに，講義においてはこれらの演習問題をレポート課題としていた．

本書において位相的弦理論とは，Einstein の重力理論を導くような物理的弦理論ではなく，数学における重要問題を解決することを念頭に置いた，経路積分で与えられる相関函数が数学的に正確に定義された「位相的不変量」となるような，弦理論のアイデアと整合する数学的に厳密な理論のことである．筆者の考えでは，弦とその相互作用により空間を記述する，ということが弦理論の目的の一つであり，多様体の中で弦が運動するという描像をあらかじめ設定するのは不自然である．したがって，本書では「弦が時間発展して得られるリーマン面から多様体への写像を考え，それで...」という形で弦理論を記述しようとはしない．もちろん，このようにして得られる重要な位相的弦理論も存在するが，それはより普遍的な理論の幾何学的実現と考えるからである．そこで，場の理論として環と加群の理論を，開弦と D-brane およびそれらの相互作用を記述する理論として圏論を，それぞれ基礎として話を展開する．そして，ゲージ場の量子論で最も重要な概念の一つである BRST 作用素を取り入れた「最小の」位相的開弦の場の理論—dg 圏を考察の主対象とするのである．

位相的開弦の場の理論から位相的閉弦の場の理論が函手的に構成できるだろう，という Kontsevich のアイデアを具体化することが，当該研究分野で最も重要な問題の一つとなっている．このための重要な課題が Toën の dg 森田理論によって解決された．本書の最終目的は，この dg 森田理論と次に解決を目指すべき諸問題の解説である．

謝辞：誤植の発見や索引の作成に協力してくれた大学院生の白石勇貴君と，出版にあたって大変お世話になったサイエンス社「数理科学」編集部の平勢耕介氏および伊崎修通氏に心から感謝の意を表したい．

2012 年 4 月

高橋 篤史

目　次

第 1 章
環論の基礎

「弦が万物を記述する」という超弦理論の基本思想を思い出すとき，位相空間論ではなく環論から幾何学の構築を目指すのはより自然である．そもそも日常や物理における「空間」とは，場や物質などが存在できる場所のことである．例えば,「質点を配置できる場所」といった具合にである．場が持つべき重要な性質——重ね合わせの原理と近接相互作用——を環論は記述する．

非可換環とその上の加群についての参考文献として，Cartan–Eilenberg [1] および岩永・佐藤 [12] を挙げておく．

1.1 環

定義 1.1.1. R を集合とする．**和 (sum)** と呼ばれる二項演算

$$+ : R \times R \longrightarrow R, \quad (x, y) \mapsto x + y,$$

および**積 (product)** と呼ばれる二項演算

$$\cdot : R \times R \longrightarrow R, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y,$$

が定まり，これらが以下の性質をみたすとき，集合 R を**環 (ring)** という：

(i) $(R, +)$ は単位元 0_R を持つ加法群である．つまり，任意の元 $x, y, z \in R$ に対して，次の条件が成立する：

$$(x + y) + z = x + (y + z), \tag{1.1a}$$

$$0_R + x = x = x + 0_R, \tag{1.1b}$$

$$x' + x = 0_R = x + x' \text{ となる元 } x' \text{ が存在する}, \tag{1.1c}$$

$$x + y = y + x. \tag{1.1d}$$

(ii) 積 $\cdot$ について分配法則が成立する．つまり，任意の元 $x, y, z \in R$ に対して，

第 2 章
圏と函手

同じ性質を持つ数学的対象を一斉に考えることを可能にするのが圏論である．そこでは，数学的対象そのものが持つ性質によってでなく，それらの相互関係が持つ性質を理解することにより，全体像を解明することが目的となる．圏論はその抽象性から難解な部分も多い．しかし，それを開弦 (open string) の場の理論とみなして，物理的な言葉で数学的定義を言い換えると非常に理解しやすい．例えば,「対象」は「D-brane」,「射」は「開弦の状態」,「合成」は「相互作用」,「恒等射」は「真空状態」などとして読めばよいのである．

この章では，圏論の基本的事項について解説する．参考文献として Gelfand–Manin [6] および Kashiwara–Schapira [16] を挙げておく．

2.1 圏

本書では，集合論の範疇で考えることのできる圏のみを扱う．

定義 2.1.1. **圏 (category)** $\mathcal{C}$ は以下のもので構成される：

(i) **対象 (object)** の集合 $Ob(\mathcal{C})$ および**射 (morphism)** の集合 $Mor(\mathcal{C})$.

(ii) 写像 $i_{\mathcal{C}} : Ob(\mathcal{C}) \longrightarrow Mor(\mathcal{C})$ および写像 $s_{\mathcal{C}}, t_{\mathcal{C}} : Mor(\mathcal{C}) \longrightarrow Ob(\mathcal{C})$ で，$s_{\mathcal{C}} \circ i_{\mathcal{C}} = \mathrm{id}_{Ob(\mathcal{C})}$ かつ $t_{\mathcal{C}} \circ i_{\mathcal{C}} = \mathrm{id}_{Ob(\mathcal{C})}$ となるもの．ここで，対象 $X \in \mathcal{C}$ に対して，射 $i_{\mathcal{C}}(X) \in \mathcal{C}(X, X)$ を X の**恒等射 (identity morphism)** といい，id_X であらわす．また，$Mor(\mathcal{C})$ の部分集合 $\mathcal{C}(X, Y)$ を

$$\mathcal{C}(X, Y) := \{f \in Mor(\mathcal{C}) \mid s_{\mathcal{C}}(f) = X,\ t_{\mathcal{C}}(f) = Y\}$$

であらわす.

(iii) 任意の対象 $X, Y, Z \in Ob(\mathcal{C})$ に対して定まる，次の 2 つの条件 (a),(b) をみたす**合成写像 (composition map)**：

$$- \circ_{\mathcal{C}} - : \mathcal{C}(Y, Z) \times \mathcal{C}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X, Z), \quad (g, f) \mapsto g \circ_{\mathcal{C}} f.$$

第 3 章
環論における圏論的諸定理

この章では，圏論的に与えられる環論の諸定理（森田同値，環の森田理論（Eilenberg–Watts の定理），Gabriel–Popescu の定理）の解説を行う．これらはあとで dg 圏を考察する際に目標となる基本的定理であり，いくつもの重要な帰結をもたらす．参考文献として，岩永・佐藤 [12] および Kashiwara–Schapira [16] を挙げておく．

この章を通じて，$\mathbb{U}$ を普遍集合，k を $\mathbb{U}$-小可換環とする．

3.1 線型圏

射の集合が k-加群であるような圏を考える．

定義 3.1.1. 圏 $\mathcal{C}$ が条件

(i) すべての $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して，$\mathcal{C}(X, Y)$ は k-加群．

(ii) 合成 $\circ_{\mathcal{C}}$ は k-双線型．

をみたすとき，圏 $\mathcal{C}$ を k-**圏** (k-**category**) という．

注意 3.1.2. とくに，k-圏 $\mathcal{C}$ においては，合成 $\circ_{\mathcal{C}}$ を k-準同型 $\mathcal{C}(Y, Z) \otimes_k \mathcal{C}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X, Z)$ とみなしてよい．

k-圏の例として最も基本的なものは k-代数である．

例 3.1.3. R を k-代数とする．このとき，k-圏 $\mathcal{R}$ が $Ob(\mathcal{R}) := \{\bullet\}$ および $\mathcal{R}(\bullet, \bullet) := R$ として定まる．

また，射の和だけでなく，対象の和を考えることも自然であろう．

定義 3.1.4. $\mathcal{C}$ を k-圏，X_1, X_2 を $\mathcal{C}$ の対象とする．対象 $Y \in \mathcal{C}$ および図式

$$X_1 \underset{p_1}{\overset{i_1}{\rightleftarrows}} Y \underset{i_2}{\overset{p_2}{\leftrightarrows}} X_2$$

第 4 章

dg加群

abel 圏の理論では取り扱えない重要な対象がいくつもある．たとえば，R-加群の完全列 $0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ を「物理的直感」とともに考えたとき，$L \longrightarrow M$ は K と N という 2 つの D-brane の結合状態と思いたいが，明らかに $L \longrightarrow M$ は $\mathrm{Mod}(R)$ の対象ではない．したがって，このようなものも考察するならば，より多くの対象を自然に含む圏を与える必要がある．このために導入する概念が dg 加群または複体と呼ばれるものである．

また，前章までの代数系において，量子場の理論において最も重要な概念の一つである BRST 作用素（量子論的ゲージ対称性の無限小生成子）は登場していなかった．BRST 作用素を取り入れ，abel 圏の持つ良い性質を拡張する代数系を得たいと思うのは，弦理論の立場からも自然であるが，dg 加群というのはまさに BRST 作用素付きの状態空間に他ならないのである．

この章を通じて，$\mathbb{U}$ を普遍集合，k を $\mathbb{U}$-小可換環とする．

4.1　次数付き加群

まず，次数付き k-加群の概念と関連する定義を述べる．

定義 4.1.1. k-加群 M は，k-加群 $M^p, p \in \mathbb{Z}$ の余積となる，つまり

$$M = \coprod_{p \in \mathbb{Z}} M^p \tag{4.1}$$

となるとき，**次数付き k-加群 (graded module)** であるという．元 $v \in M^p$ を M の次数 p の元といい，その次数 p を $\bar{v}$ であらわす．

定義 4.1.2. M を次数付き k-加群とする．すべての $p \neq 0$ に対して $M^p = 0$ が成立するとき，M は**次数 0 に集中している (concentrated in degree 0)** という．

第 5 章
位相的開弦の理論と dg 圏

三角圏は数学の各分野をつなぐ重要な対象である．しかしながら，三角圏にはいくつか大きな欠点があることも同時に知られている．まず，いわゆる「写像錐が函手的でない」という問題点がある．さらに，三角圏を線型圏とみなしてテンソル積や内部準同型を取ったとき，それらは必ずしも再び三角圏の構造を持つとは限らない．

これらの欠点を克服するために用いられるようになったのが dg 圏である．初めの問題は Bondal–Kapranov [2] によって，後の問題は Toën [32] によって，それぞれ解決されることとなった．

一方で，弦理論の立場からは，圏というのは D-brane 付きの開弦とそれらの相互作用を記述するもの，dg 加群というのは BRST 作用素付きの状態空間を記述するものである．D-brane 付きの開弦の場の理論がみたすべき最小の性質を記述しようとすると，自然に圏と dg 加群の「ハイブリッド」を考えるに至る．これこそ dg 圏に他ならないのである．

dg 圏に関する基本的参考文献として Keller [17], [18] を挙げておく．

この章を通じて，$\mathbb{U}$ を普遍集合，k を $\mathbb{U}$-小可換環とする．

5.1 dg 圏と dg 函手

定義 5.1.1. k-圏 $\mathcal{A}$ が，条件

(i) 任意の対象 $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ に対して，射の集合 $\mathcal{A}(a_1, a_2)$ は dg k-加群である．

(ii) 任意の対象 $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{A}$ に対して，射の合成

$$- \circ_{\mathcal{A}} - : \mathcal{A}(a_2, a_3) \otimes_k \mathcal{A}(a_1, a_2) \longrightarrow \mathcal{A}(a_1, a_3), \quad x \otimes y \mapsto x \circ_{\mathcal{A}} y, \tag{5.1}$$

は dg k-加群の射である．

第 6 章

dg森田理論

この章では Toën [32] による dg 森田理論の骨子を解説する．これは環の森田理論を自然に拡張しているだけでなく，dg 圏を研究するにあたり必要不可欠な基本定理である．また，dg 圏を位相的開弦の場の理論とみなしたとき，それから得られる閉弦の場の理論が矛盾なく定義されるためには dg 森田理論が必要となるのである．

基本的に Toën [32] に沿って話を進めているが，dg $\mathcal{A}$-加群の compact 性および perfect 性の定義および性質については，Toën–Vaquié [33] の対応する部分から引用している．また，dg 圏の滑らかさや固有性の概念は Kontsevich–Soibelman [20] に，Calabi–Yau 性は Ginzburg [7] に基づいている．

この章を通じて，$\mathbb{U}$ で普遍集合，k で $\mathbb{U}$-小可換環をあらわす．

6.1 $\mathbf{hodgcat}(\boldsymbol{k})_{\mathbb{U}}$ における内部準同型

定義 6.1.1. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を $\mathbb{U}$-小 dg 圏とする．

(i) dg $\mathcal{A}^{op} \otimes_k^{\mathbb{L}} \mathcal{B}$-加群 $\mathcal{X}$ は，任意の $a \in \mathcal{A}$ に対して $\mathcal{X}_{a\otimes -}$ が擬表現可能 dg $\mathcal{B}$-加群となるとき，**擬 dg 函手 (quasi dg functor)** であるという．

(ii) 擬 dg 函手全体のなす $\mathcal{D}_{dg}(\mathcal{A}^{op} \otimes_k^{\mathbb{L}} \mathcal{B})_{\mathbb{U}}$ の充満部分 dg 圏を $\mathcal{D}_{dg}^{rqr}(\mathcal{A}^{op} \otimes_k^{\mathbb{L}} \mathcal{B})_{\mathbb{U}}$ であらわす．

(iii) 擬 dg 函手全体のなす $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{op} \otimes_k^{\mathbb{L}} \mathcal{B})_{\mathbb{U}}$ の充満部分圏を $\mathcal{D}^{rqr}(\mathcal{A}^{op} \otimes_k^{\mathbb{L}} \mathcal{B})_{\mathbb{U}}$ であらわす．

圏 $\mathcal{D}$ における，対象の同型類のなす集合を $\mathrm{Iso}(\mathcal{D})$ であらわす．

定理 6.1.2. $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ を $\mathbb{U}$-小 dg 圏とする．このとき，次の自然な同型写像が存在する：

$$\mathbf{hodgcat}(k)_{\mathbb{V}}(\mathcal{A}, \mathcal{D}_{dg}(\mathcal{B})_{\mathbb{U}}) \simeq \mathrm{Iso}(\mathcal{D}(\mathcal{A}^{op} \otimes_k^{\mathbb{L}} \mathcal{B})_{\mathbb{U}}). \tag{6.1}$$

第 7 章

位相的閉弦の理論と原始形式

位相的閉弦の理論の種数 0 部分が持つべき性質は，90 年代初めに Dubrovin により Frobenius 構造として公理化された．それは位相的弦理論と可積分系の興味深い関係をより深く解析するためであった．一方で，その構造を含むより一般的な枠組みが，原始形式の理論として，さらに 10 年も前に齋藤恭司によって与えられていた．楕円積分論を自然に一般化・高次元化する理論を構築するという，一見全く異なる動機から同じ構造が発見されていたのである．

この章では，Frobenius 構造とそれを系統的に導く手法を与える原始形式の理論の骨格部分について述べる．簡単のため底空間 M は複素多様体であるとして公理を与えている．これは，底空間がどのような構造を持つ幾何学的対象であるとすべきか現状では確定していないように思えること，中途半端に拡張するとかえって複雑になる，という理由からである．

参考文献として Dubrovin [3]，Hertling [9]，Manin [21]，Sabbah [23] および Saito–Takahashi [28] を挙げておく．なお，この章の内容は Saito–Takahashi [28] を，孤立超曲面特異点に限定しないより一般的な状況に拡張した形で記述し，解説するものである．紙数および話題の展開の都合上述べられない背景や具体例については，これらで補っていただきたい．

7.1 Frobenius 構造

この節では複素多様体とその上の層を取り扱うが，これらの言葉に不慣れな読者は以下で $\mathcal{O}_M$ を μ 変数の複素数係数形式的べき級数環 $\mathbb{C}[[s_1, \ldots, s_\mu]]$ とし，$\mathcal{T}_M = \oplus_{i=1}^{\mu}\mathbb{C}[[s_1, \ldots, s_\mu]]\partial/\partial s_i$, $\Omega_M^1 = \oplus_{i=1}^{\mu}\mathbb{C}[[s_1, \ldots, s_\mu]]ds_i$ などとして読んでよい．

定義 7.1.1. M を μ 次元の複素多様体とし，$\mathcal{O}_M, \mathcal{T}_M, \Omega_M^1$ でそれぞれ M の構造層・接層・余接層をあらわす．また，d を複素数とする．以下の性質をみたす

第 8 章
ミラー対称性へ

全く異なる幾何学的・代数学的背景を持つ理論に起源をもつ Frobenius 構造が「偶然に」同型となる，という現象が多く発見されていた．その現象において次数付きベクトル空間の同型に注目し，ベクトル空間の次元をダイヤモンド状に配置した Hodge diamond と呼ばれる図を見比べると，まるで自分自身と鏡に写った自分の鏡像の関係となっていた．このような歴史に基づき，異なる幾何学的・代数学的背景を持つ Frobenius 構造の同型はミラー対称性という名前を与えられて研究されることとなった．

課題となったのは,「偶然に」という部分を「必然的に」とすることである．この章では Kontsevich によるアプローチとその現状について解説を行う．基本的アイデアは「D-brane と開弦の理論から閉弦の理論が自然に現れる」ということである．ただし，相当な部分が未解決として残っている．これまでの章とは異なり，現在活発に研究されている進行中の内容を，あえて未完成・未整備のままで紹介する．

8.1 ホモロジー的ミラー対称性予想

Symplectic 幾何学と複素代数幾何学という一見全く異なる幾何学を圏同値で結び付けることによりミラー対称性を自然に説明する，という驚くべきアイデアが Kontsevich により提唱された．これは**ホモロジー的ミラー対称性予想 (homological mirror symmetry conjecture)** と呼ばれていて，次のように表現される：

予想 8.1.1 (Kontsevich [19]). Calabi–Yau 多様体 X および Y で，**hodgcat** (k) における同型

$$\mathrm{per}_{dg}(\mathcal{F}uk(X)) \simeq \mathrm{per}_{dg}(Y) \tag{8.1}$$

付録 A

集合論からの準備

この本では，ZFC 集合論に普遍集合の公理を認めるという立場で，圏論を考察している．そこで，集合論に慣れていない読者のために，その基本的規則と用語法を少し説明しておく．

参考文献として，齋藤正彦 [26]，斎藤毅 [27] を挙げておく．なお，普遍集合については Kashiwara–Schapira [16] および原論文 SGA4 [30] を参照してほしい．

A.1　集合論の言語と論理式

まずは，集合論において許される表現方法を決定する必要がある．それは逆理を可能な限り排除するためである．

定義 A.1.1. **集合論の言語** は以下のもので構成される：

(i) 「集合」と呼ばれる，変数 $a, b, c, \ldots$.

(ii) 「否定」と「または」という意味を与える，論理式接続記号 $\neg$ と $\vee$.

(iii) 「存在する」という意味を与える，量化記号 $\exists$.

(iv) 「等しい」という意味を与える，等号 $=$.

(v) 「元である」という意味を与える，述語 $\in$.

定義 A.1.2. 集合論の言語に対して，**論理式**を次のように構成する：

(i) 変数 a, b に対して，$[a = b]$ および $[a \in b]$ は論理式である．

(ii) 論理式 P, Q に対して，$[\neg P]$ および $[P \vee Q]$ は論理式である．

(iii) 論理式 P および変数 a に対して，$[\exists a P]$ は論理式である．

(iv) 論理式は上の (i),(ii),(iii) によってのみ構成される．

簡単のために，これらは以下のように括弧 [ ] を省略することもある：

- $[a = b]$ を $a = b$ とあらわし,「a は b に等しい」という．
- $[a \in b]$ を $a \in b$ とあらわし,「a は b の元である」または「b は a を元とし

付録 B
三角圏

dg 圏 $\mathcal{A}$ の導来圏 $\mathcal{D}(\mathcal{A})_{\mathbb{U}}$ の持つ重要な性質として，それが三角圏の構造を持つということがある．これは，環上の加群の圏が abel 圏の構造を持つことの自然な類似である．また，完全三角形という概念により，D-brane の崩壊や結合状態という物理的な描像を記述することができる．本書では触れることができないが，この描像に基づいた**安定性条件 (stability condition)** という数学的概念により，導来圏の内部構造をより精密に理解することが可能となる．

ここでは，三角圏の基礎を簡単に解説した後，Happel [8] によって与えられた，Frobenius 圏の安定圏として三角圏を一般的に構成する枠組みを説明する．他の三角圏の文献として，Kashiwara–Schapira [16] や Neeman [22] を挙げておく．

B.1 定義

k を可換環とする．

定義 B.1.1. $\mathcal{T}$ を k-線型圏，$T : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ を k-線型圏の同値函手とする．

(i) $\mathcal{T}$ における射の列

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

を**三角形 (triangle)** という．ただし，記号を簡単にするため，$T(X)$ を単に TX であらわす．

(ii) $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ および $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} TX'$ を $\mathcal{T}$ における三角形とする．$\mathcal{T}$ における射の図式

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & TX \arrow[d, "Tf"] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & TX'.
\end{tikzcd}$$

付録 C
圏の局所化とモデル構造

この章では本書を読むにあたり最低必要となる，圏の局所化とモデル圏の概念・用語法の説明を行う．圏の局所化については Kashiwara–Schapira [16] を，モデル圏については Hirschhorn [10] および Hovey [11] を，それぞれ参照していただきたい．

この章を通じて，$\mathbb{U}$ で普遍集合をあらわす．

C.1 圏の局所化・導来函手

定義 C.1.1. $\mathcal{C}$ を $\mathbb{U}$-小圏，S を $\mathcal{C}$ における射の集合 $Mor(\mathcal{C})$ の部分集合とする．$\mathbb{U}$-小圏 $\mathcal{C}_S$ および函手 $l : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_S$ が条件

(i) すべての $s \in S$ に対して，$l(s)$ は同型射である．

(ii) 任意の $\mathbb{U}$-小圏 $\mathcal{C}'$ に対して，l により自然に得られる函手

$$l^* : \mathcal{H}om(\mathcal{C}_S, \mathcal{C}') \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$$

は忠実充満である．

(iii) 函手 l^* の本質的像は，すべての $s \in S$ に対して $F(s)$ が同型射となる函手 $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ のなす部分圏である．つまり，$\mathbb{U}$-小圏 $\mathcal{C}'$ および函手 $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ で $F(s)$ が同型射となるものが与えられたとき，函手 $F_S : \mathcal{C}_S \longrightarrow \mathcal{C}'$ で $F \simeq F_S \circ l$ となるものが存在する．

をみたすとき，圏 $\mathcal{C}_S$ を S による $\mathcal{C}$ の局所化 (**localization of $\mathcal{C}$ with respect to S**) という．

定理 C.1.2. $\mathcal{C}$ を $\mathbb{U}$-小圏，S を $\mathcal{C}$ における射の集合 $Mor(\mathcal{C})$ の部分集合とする．このとき，S による $\mathcal{C}$ の局所化 $\mathcal{C}_S$ が存在する．

証明 省略する．□

注意 C.1.3. 局所化の定義により，$\mathcal{C}_S$ は圏同値を除いてただ一通りに定まる．

参考文献

[1] E. Cartan and Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton University Press, Princeton, N. J., (1956).

[2] A. Bondal and M. Kapranov, Enhanced triangulated categories, *Math. USSR Sbornik*, Vol.**70**, No.1, 93–107, (1991) .

[3] B. Dubrovin, Geometry of $2D$ topological field theories. Integrable systems and quantum groups (Montecatini Terme, 1993), *Lecture Notes in Math.*, **1620**, Springer, Berlin, 120–348, (1996).

[4] 深谷賢治,『シンプレクティック幾何学』, 岩波書店,（2008）.

[5] K. Fukaya, Y. Oh, H. Ohta, K. Ono, *Lagrangian intersection Floer theory: anomaly and obstruction, Part I, II.* AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, **46.1**, **46.2**. American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Somerville, MA, (2009).

[6] I. Gelfand and Y. Manin, *Methods of Homological Algebra*, Second edition. Springer Monographs in Mathematics. Springer–Verlag, Berlin, (2003).

[7] V. Ginzburg, Calabi–Yau algebras, arXiv:math/0612139.

[8] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **119**. Cambridge University Press, Cambridge, (1988).

[9] C. Hertling, *Frobenius manifolds and moduli spaces for singularities*, Cambridge Tracts in Mathematics, **151**. Cambridge University Press, Cambridge, (2002).

[10] P. Hirschhorn, *Model categories and their localizations*, Mathematical Surveys and Monographs, **99**. American Mathematical Society, Providence, RI, (2003).

[11] M. Hovey, *Model Categories*, Mathematical Surveys and Monographs, **63**. American Mathematical Society, Providence, RI, (1999).

[12] 岩永恭雄, 佐藤真久,『環と加群のホモロジー代数的理論』, 日本評論社,（2002).

[13] 梶浦宏成,『数物系のための圏論』, 臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ-**75**,（2010).

[14] L. Katzarkov, M. Kontsevich, T. Pantev, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **78**, 87–174, (2008).

[15] D. Kaledin, Non-commutative Hodge-to-de Rham degeneration via the method of Deligne-Illusie, *Pure Appl. Math.* Q. **4**, no. 3, Special Issue: In honor of Fedor Bogomolov. Part 2, 785–875, (2008).

[16] M. Kashiwara and P. Schapira, *Categories and Sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], **332**. Springer–Verlag, Berlin, (2006).

[17] B. Keller, On differential graded categories, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol **2**, *Eur. Math. Soc.*, Zürich, 151–190, (2006).

[18] B. Keller, Deriving dg categories, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* **27**, 63–102, (1994).

[19] M. Kontsevich, Homological algebra of mirror symmetry, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol **1, 2** (Zürich,1994)(Basel), Birkhäuser, 120–139, (1995).

[20] M. Kontsevich, I. Soibelman, Notes on $\mathcal{A}_\infty$-algebras, $\mathcal{A}_\infty$-categories and non-commutative geometry. I, Homological mirror symmetry, *Lecture Notes in Phys.*, **757**, Springer, Berlin, 153–219, (2009).

[21] Y. Manin, *Frobenius manifolds, quantum cohomology, and moduli spaces*, American Math. Society Colloquium Publ. v.**47**, (1999).

[22] A. Neeman, *Triangulated Categories*, Annals of Mathematics Studies, **148**. Princeton University Press, Princeton, NJ, (2001).

[23] C. Sabbah, *Isomonodromic deformations and Frobenius manifolds. An introduction*, Universitext. Springer–Verlag London, Ltd., London; EDP Sciences, Les Ulis, (2007).

[24] K. Saito, Period Mapping Associated to a Primitive Form, *Publ. RIMS*, Kyoto University **19**, 1231–1264, (1983).

[25] M. Saito, On the structure of Brieskorn lattice, *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble) **39**, no.1, 27–72, (1989).

[26] 齋藤正彦,『数学の基礎』，東京大学出版会，(2002).

[27] 斎藤毅,『集合と位相』，東京大学出版会，(2009).

[28] K. Saito and A. Takahashi, From Primitive Forms to Frobenius manifolds, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **78**, 31–48 (November 2008).

[29] P. Seidel, *Fukaya categories and Picard-Lefschetz theory*, Zurich Lectures in Advanced Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zurich, (2008).

[30] Seminaire de Geometrie Algebrique du Bois Marie, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas* (SGA 4), Lecture Notes in Mathematics, **269**. Springer–Verlag, Berlin–New York, (1972).

[31] G. Tabuada, Une structure de categorie de Modeles de Quillen sur la categorie des dg categories, *Comptes Rendus de l'Academie de Sciences de Paris*, **340** (1), 15–19, January 2005.

[32] B. Toën, The homotopy theory of dg-categories and derived Morita theory, *Invent. Math.*, **167**, no. 3, 615–667, (2007).

[33] B. Toën and M. Vaquié, Moduli of objects in dg-categories, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (4), **40**, no. 3, 387–444, (2007).

索　　引

サ

タ

ナ

ハ

マ

ヤ

著者略歴

髙橋 篤史
たかはし あつし

1975年 大阪府に生まれる
1999年 京都大学大学院理学研究科博士後期課程中途退学
現 在 大阪大学大学院理学研究科数学専攻教授
京都大学博士（理学）
専 門 複素幾何学，数理物理学

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ-89
『弦理論の代数的基礎 環・加群・圏から位相的弦理論，ミラー対称性へ』（電子版）

著 者 髙橋 篤史

2019年3月10日 初版発行 ISBN 978-4-7819-9961-6
この電子書籍は2012年4月25日初版発行の同タイトルを底本としています．

数理科学編集部 発行人 森 平 敏 孝
TEL.(03)5474-8816
FAX.(03)5474-8817

ホームページ http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は sk@saiensu.co.jp まで．

発行所 © 株式会社 サイエンス社 TEL.(03)5474-8500（代表）
〒151-0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1-3-25

組版 クォンタ