SGC ライブラリ-119

# 場の理論の構造と幾何

3次元超対称場の理論からその先へ

山崎 雅人　著

サイエンス社

# まえがき

まず問いから始めよう：**量子場の理論とは何なのだろうか？**

この本が取り扱うのは場の理論，特に超対称性を持つ場の理論である．しかしそもそも 21 世紀の現在，場の理論についても超対称理論についても素晴らしい本が沢山出ている中で何故今更，新たな一冊が必要なのか？

このことを自分自身に問い直すとき，筆者は素粒子物理学の勉強を始めた頃を思い出す．その頃の私が漠然と考えていたのは，場の理論の基礎はさっさと習熟しそこから「卒業」して，例えば超弦理論のより「先端的な」話題に進んでいかなければいけないのではないかということである．素粒子物理や特に超弦理論の研究をする現代の学生には学ばなければならないことが数多くあるのは事実であり，これはある意味実用的な立場といえなくもない．

勿論，場の理論の周辺に本質的な問題が数多く残されていることは明白である．場の理論は広汎な枠組みであり，それを様々な現実世界の系に応用することは各分野において重要な問題であるし，また個々の場の理論の問題をどう解くか（例えばクォークの閉じ込めをどう解析的に示すか）は大きな問題であるということは当時の私にも分かっていた．しかし，我々の考える場の理論の基本的なパラダイムは偉大な先人達の努力によって既に確立されており，もう**場の理論の枠組みそのもの**についてやることは残されていないのだろうか？ 後世に生まれた我々は先人達の打ち立てたルールに従って場の理論という「通常科学」のゲームにいそしむことが研究者としての仕事であるのだろうか？ これが当時の私が抱いた疑問である．

無論，「通常科学」としての場の理論の研究が極めて重要であることは論を俟たないし，それこそが科学研究の一環としての場の理論の研究の王道であるとさえいうことができる．しかし，物理学という学問では根源的な問いに絶え間なく立ち返ることによって時に大きなブレークスルーがもたらされてきたのも確かであり，場の理論という巨大な枠組みでさえもその例外ではないと期待するのはそれほど突飛なことではないかもしれない．場の理論の数学的な基礎付けは現在でもまだ完成していないのは事実であるし，近年の超弦理論の発展に伴って場の理論にも新しい見方がもたらされるようになってきた．場の理論の定式化そのものについて改めて考え直してみることも，全く無駄とはいえないのではないか．歴史を振り返っても，我々の場の理論の理解が劇的に深まった例はある：例えば繰り込みと有効場の理論の考え方は場の理論の教科書を大きく書き換えるに至った．

そもそも我々は場の理論を，その本質をどれだけ理解したといえるのだろうか？ 場の理論を指定するデータは何だろうか？ 全ての可能な場の理論のうち，我々が通常の意味で知っているものはどれだけなのだろうか？ 現状の場の理論の定式化とは全く異なる新たな場の理論の定式化は存在する

のだろうか？ 場の理論の全体の空間を考えたときに，そこに何か構造はあるだろうか？ ここでの問いは特定の場の理論（例えば 4 次元の量子色力学（QCD））をどう理解するかという問いではなく，場の理論やその集まりの定式化や理解といった場の理論そのものに関わる問いである．

勿論，この問いは既に多くの先人によって考えられてきたし（なかでも後述するように繰り込みの考え方は本質的である），そもそもこの問い自体は適切に問題を設定しない限りしばしば曖昧なものである．現在の我々の知識の中で答えることのできる適切な問いであるかどうかも全く明らかでない．

しかし筆者はこの問いに全く手がかりが無いわけではないと主張したい．この本で紹介するのは，この問いにアプローチする上で，一つの重要な手がかりに育っていく可能性がある考え方である—その歴史は古いが，21 世紀に入ってからその重要性が再認識されてきた．

一言で言えば，それは様々な**幾何的手法**を駆使して超対称ゲージ理論の**集合**の性質やその間の関係，特にその**双対性**を理解するというものである．ここではこのような理解の枠組みのことを**幾何的ゲージ理論（geometric gauge theory）**と呼ぶことにしよう．これは，いわば場の理論のなす全体の構造を，幾何学の問題に翻訳する試みであるといえる．

本書が目標とするのはこの幾何的ゲージ理論の考えを **3 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論**と **3 次元多様体論**との関係を例に説明することである．そこでは 2 次元や 3 次元の双曲幾何，結び目理論，クラスター代数等の幾何・代数が代わり代わり現れ，超対称ゲージ理論の豊饒な世界を描き出していく．

この分野で進展があったのはここごく数年のことであり，この主題に正面から取り組んだ本は英語の本を含めてこれまで存在してこなかった．本書の目的はそのギャップを埋めることである．しかしだからといって奇を衒うことが目的ではない．この本で取り扱う超対称ゲージ理論の性質の多くは 90 年代から知られているスタンダードなものである．むしろ，そのスタンダードな内容を再度考え直すことで，**幾何的な構造が自然に現れる**というのが主張の一つである．

本書で現れる数学は物理の学生にはそれほど馴染みの無いものかもしれず，本書の内容は少なからぬ初学者に数学的過ぎるとの印象を与えるようである．しかし，我々の議論する数学的構造は人工的に作り出すものでない．それは超対称場の理論たちに真摯に向き合い，耳を澄ますことで聞き取ることのできる美しい調べなのである．

この本は超対称場の理論についての網羅的な教科書でも入門書でもなければ，分野の権威が経験をもとに分野の発展を振り返った本ではない．また，長い年月を経てその内容が確立された内容をまとめた本でもない．むしろ，この本の内容の核心はごく最新の研究の成果であり，その意味でこの本の内容が早晩時代遅れになる可能性も大いにあるし，筆者自身今後の研究によってそうなることを願っている．本書の内容の一部は筆者の独断と偏見を含んでおり，この点については読者の寛恕を乞う他はない．

それら全ての欠点にもかかわらずこの本が目指すことが一つある．それは，場の理論たちについて理解しようとする試みの中で筆者が経験してきた出会いのストーリーと興奮を，**今まさにあるものとして**読者に伝えることである．21 世紀に入った今なお場の理論たちが生きたものとして躍動する世界が存在すること，そのことこそが，十年前の自分，そして今この本を手に取っているあなた

に伝えたいささやかなメッセージである．

**2015 年 4 月**　プリンストンにて

山崎雅人

**謝辞**

本書の内容は，筆者がこれまで 30 余年の間に数え切れないほど多くの人と出会い議論する中で生まれてきたものである．その数は余りに多く，ここでは一人一人名前を述べることはできないが，この場を借りて皆さんに感謝したい．

本書に直接関係する内容については共同研究者であり数学者でもある寺嶋郁二氏，長尾健太郎氏との議論には特に感謝したい*1)．寺嶋氏及び米倉和也氏からは原稿にコメントを頂いた．さらに本書の執筆に関連して，Nima Arkani-Hamed, Benjamin Assel, Francesco Benini, Tudor D. Dimofte, John Estes, 藤博之, Dongmin Gang, Sergei Gukov, Akikazu Hashimoto, Jonathan J. Heckman, 細道和夫, Ken Intriligator, Ivan Chi-ho Ip, Rinat Kashaev, Igor Klebanov, Sungjay Lee, 西岡辰磨, 奥田拓也, Peter Ouyang, Pavel Putrov, Shlomo S. Razamat, Mauricio Romo, Nathan Seiberg, 立川裕二, Jörg Teschner, Cumrun Vafa, Herman Verlinde, 渡辺伯陽, Brian Willett, Edward Witten, Dan Xie の各氏との議論にも感謝したい．

本書の出版を企画してくださったサイエンス社，編集者の平勢耕介氏また特に高橋良太氏に感謝したい．執筆依頼を受けた時には，駆け出しの研究者がこのような書物を日本語で書くことに意味があるのか正直戸惑いも覚えたが，与えられた分量で好きなように書かせて貰ったことは自分の理解を見つめ直す貴重な経験であった．そのささやかな成果が読者にとっても有意義なものであることを祈っている．

本書は筆者が各地で行った講演，特に日本物理学会秋期大会（2012），京都大学数理解析研究所 (2013), 国立台湾大学 (2013) *2) 等でのまとまった講演・講義さらには雑誌数理科学での記事[1], [2] *3) 等の内容を整理・発展させたものである．講義等の機会にフィードバックをくださった皆様に感謝したい．

また，筆者の研究及び執筆活動をサポートしてくださった東京大学カブリ数物連携宇宙研究機構及びプリンストン高等研究所，さらには私の科学研究に支援を与えてくださってきた全ての皆さんに感謝したい*4)．

---

*1)　本書の執筆中に長尾氏の訃報に接した．数学や物理を議論できた彼との短くそして素晴らしい時間は何ものにもかえがたいものであった．素晴らしい人材が失われてしまったことは本当に残念でならない．この本を彼の思い出に捧げたい．

*2)　http://phys.cts.ntu.edu.tw/workshop/2013/1212string/default.aspx?tclass=2 から youtube にアップロードされた講演の動画（計 3 時間分）を見つけることができる．また筆者のウェブページからは本書の内容に関連した講演のビデオへのリンクが見つかる．

*3)　数理科学での記事は本書の内容を本書よりもずっと短い分量で説明しているので忙しい方には特にお薦めである．

*4)　本書の内容についての研究は東日本大震災の前後に行ったものである．絶望的なまでの無力感の中でそれでも世界に向き合い，自分の生きる意味を問い直し続けること，そのことへの尽きせぬ思いこそが，私を研究に駆り立てる原動力なのである[3]．

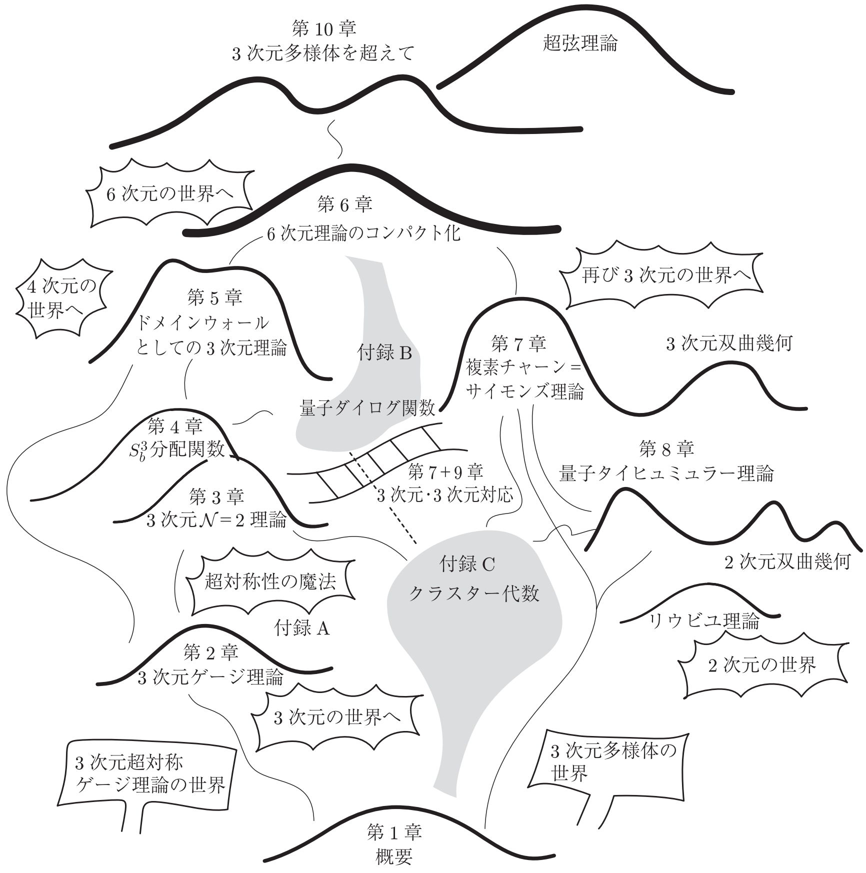


図 1　本書の世界を踏破するためのロードマップ．我々は 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論の世界と 3 次元多様体の世界を自由自在に行き来する．学問に境界はないのだ．

## 内容の要約

読者の便宜のために本書の内容を概観しておこう（図 1）．

第 1 章では，各論に入る前に基本的な考え方を本書の他の部分よりも一般的な文脈で説明し，後の議論を動機づけたい．

第 2 章で 3 次元場の理論，特にその「貼り合わせ」について説明したあと，次の第 3 章では 3 次元 $\mathcal{N}=2$ の超対称性を持つ理論の基礎事項についてまとめる．次の第 4 章ではそれを $S^3$ 分配関数や付録 B で定義される量子ダイログ関数の言葉に読み直す．第 5 章では $S^3$ 分配関数がある有限次元のヒルベルト空間の演算子の期待値と再解釈され，その背景には 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論のドメインウォール解釈があることが明らかにされる．

ここまでは 3 次元 $\mathcal{N}=2$ ゲージ理論についてもっぱら議論してきたが，第 6 章以降は 3 次元多様体の世界に入っていく．第 6 章で 6 次元理論のコンパクト化を議論した後，第 7 章ではそこから現れる複素チャーン＝サイモンズ理論やその古典解である 3 次元双曲幾何学を取り扱う．

さらに，より詳細に 3 次元超対称理論の性質を議論するために，第 8 章において古典・量子タイ

ヒュミュラー理論について整理した後，次の第 9 章において 3 次元多様体の理想四面体分割や結び目のブレイド表示に対応した 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称場の理論についてコメントし，最後の第 10 章で本文は終わりを迎える．三つの付録 A，B 及び C ではそれぞれ超対称ゲージ理論，量子ダイログ関数及びクラスター代数についてまとめた．また読者の便宜のために索引と記号表も付けた．

### 予備知識について

本書の主な読者としては素粒子物理学に興味のある大学院生や意欲的な学部生を念頭に置いた．また関連した分野の研究者が手っ取り早くこの分野を学ぶ上でも手助けになればと願っている．

本書は場の理論についての伝統的な教程では場の理論の発展コースに位置づけられるものである．しかし，本書の理解に必要な知識は実はそれほど多くはなく，できるだけ self-contained になるように心がけたつもりである．

場の理論の基礎的考え方，例えばゲージ理論とは何であるか，また繰り込みとは何であるかについて概念的な理解があることが望ましいが，ファインマン図による摂動計算の詳細のような技術的内容は殆ど必要としない．4 次元 $\mathcal{N}=1$ 超対称性の基礎（例えば Wess-Bagger の教科書[4]での最初の 1 章から 7 章までの内容）は仮定されているが，全体の概要を把握する上では必須とはいえない．例えば超場形式についての知識は第 3 章で用いられているが，それは専ら説明の簡明さの為であって，その後の章では殆ど必要でない．従って，第 3 章の超場形式で挫折しそうになった読者は適宜飛ばして読み進めればよい．また，超弦理論についての知識はごく一部に表面的に言及されている箇所があることを除いて基本的に必要としない筈である．数学については基礎的な微積分，複素解析，微分幾何（例えば微分形式）やごく簡単なトポロジーを除けばそれほど専門的な高度な内容は必要としない．必要な数学的事実，例えば 3 次元双曲幾何や量子ダイログ関数についてはその都度説明と共に導入されている．

本書は主として物理系の読者を念頭に置いたので物理的説明が重視されている箇所が多いが，より数学的な内容を中心にして読むことも可能である．その場合は第 7，8，9 章や付録 B，C の数学的部分を中心に読み，興味・必要に応じて前の章を拾い読みすればよい．

本文中の小さい字の部分や脚注にはやや発展的な事項や補足説明を加えた．これらについて理解できないところがあっても全体の流れの理解には差し支えないのでそのまま読み進められたい．物理の理解は螺旋状に深まるものであって，今は分からない部分でも後から立ち返るとその意が通じることもあるかもしれない，それは読書の一つの楽しみでもある．

### 演習問題について

読者の理解を助ける為，各章末には演習問題を配置した．演習問題は本文の内容に従えば簡単なものが多いが，一部にはやや発展的な内容や本書で直接取り扱われていない補助的な文献の内容を扱っているものもあり，自分で考えたり文献を調べたりすることも必要になるかもしれない．また必ずしも答えがはっきり定まっていないものもある．全部完璧に解こうとせずに，能動的に学習するための手助けとして気楽に向き合っていただければと思う．難易度の目安として便宜的に [⧫], [⧫⧫] のように印を付けた．[⧫] はすぐに計算で示せるもの，[⧫⧫] はやや難しめの問題であるが，分類は恣意的であるので ⧫ の数には拘泥されることないようお願いしたい．

## 表記・規約について

専門用語については日本語に訳すか，カタカナで表記するかのどちらかだが，初出の際には英語表記も付記した．実際の研究の現場では専ら英語表記を使うことになるので常に英語表記を念頭に置くのが実用的である．

本書での記号については巻末の記号表にまとめた．

計量の符号が本質的な所は殆どない筈だが，本書では便宜上，ユークリッド化に便利であり，超対称性の文献で比較的多い $(-++\cdots+)$ を用いたつもりである．勿論，ユークリッド化した後の計量は $(++\cdots+)$ となる．

## サポートページ

本書の誤植等の付加情報については書名を検索すれば出てくるウェブページから得られるようにする予定である．現在の URL は

`http://member.ipmu.jp/masahito.yamazaki/SGCbook.shtml`

である．

# 目　次

# 第 1 章
# 概要：場の理論の幾何

場の理論の**集合**を幾何的に理解するとはどういうことか，またそれは何故必要であるのか？ 本章ではこれらの問いに対する一定の答えを順を追って説明していく．基本的な考え方を説明することを目的としたのでその記述は次章以降の内容よりもやや一般的であり，それ自身独立した序論として本書の内容を手早くまたより広く概観する為に役立つ筈である．

## 1.1　場の理論とは何か

今日の物理学の体系は，この自然界を理解しようとする先人達のたゆまぬ努力の上に築きあげられてきたものである．その巨大な物理学の体系のなかでも最も強力かつ精緻な理論の一つが**場の理論**（**field theory**），特にその中でも**量子場の理論**（**quantum field theory**）である．場の理論は極微な素粒子の世界から宇宙規模の現象に至るまでの広汎な対象を記述する理論であり，それは物理学のみならず人類全体にとっての輝かしい財産とさえいえるだろう．

この本を手にしている読者の多くは，場の理論が何であるかについて既にある程度の感覚を持っているだろう．にもかかわらず敢えて問うてみよう：**そもそも場の理論とは何なのだろうか？**[*1)]

一部の読者にとっては，この問いは奇異な問いに見えるかもしれない．この本の前書きでは場の理論の基礎的な考え方を仮定すると書いたのに，今更それ

---

*1)　関連して，量子場の理論を数学的に厳密に定義できるかという長年の難問がある．本書の議論にとってそのような数学的に厳密な枠組みは直接必要でなく，むしろその焦点は場の理論を物理としてどう理解・定式化するかという物理の範疇での概念的な問題である．また本書の議論では，主として超対称ゲージ理論から真空のモジュライ空間や分配関数といったより具体的対象を取り出し，そのレベルで議論を進めるので超対称場の理論の豊かな構造のうちごく一部（しかし，とても本質的な一部）しか用いない．勿論，場の理論の数学的定式化があれば，我々の議論は遙かに明確なものになる可能性が高いし，逆に場の理論の定式化を物理的に考え直すことが逆にその数学的定式化に貢献する可能性も大いにあると考えたい．

# 第 2 章
# 3 次元場の理論の愉しみ

前章ではゲージ化の概念を使って場の理論を貼り合わせる一般論を展開した．ここからは 3 次元場の理論の場合に特化して考えることにしよう．3 次元の場合には，場の理論の貼り合わせの概念が特に自然であり，またより一般でもある．本章の中でも特に $Sp(2n, \mathbb{Z})$ 変換の概念は次章以降で重要である．

## 2.1 トポロジカル $U(1)$ 対称性

### 2.1.1 そもそも何故 3 次元か？

本書では以下専ら場の理論として 3 次元の場の理論を考えることになる．しかし，一部の読者はこの文を読んだ途端に先に進めなくなるかもしれない．我々の宇宙は，少なくとも我々が体感できる限り 4 次元なのにそもそも何故（一見）現実離れした 3 次元理論を考えるのだろうか？ これは尤もな問いであるし，特に日頃超弦理論を研究している訳ではない読者にはなおさらなことだろう．

この問いには様々なレベルで幾つかの解答を用意することができる．例えば，技術的には第 4 章で議論する超対称ゲージ理論を解析するツールが 3 次元の場合に最も整備されていることを挙げてもいいかもしれないし，前章で述べたように 6 次元多様体から作るのに絶妙な次元であることを述べてもいいかもしれない．また，4 次元理論をよりよく理解するために 3 次元理論の理解が役立つという一般論を述べてもよいだろう．

これらは全て正しいが，本書では次の 2 点を強調しておきたい．すなわち，(1) **3 次元場の理論にはチャーン＝サイモンズ項が存在するため，場の理論の貼り合わせにより豊かな構造が存在すること** (2) **本書で考える 3 次元場の理論は，4 次元場の理論におけるドメインウォールとして現れること**である．

以下で説明していくように，上記 2 点は場の理論の幾何という理論的問題を

# 第 3 章
# 3 次元超対称理論速成コース

本章では 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称理論の基本事項を要約する．なかでも実質量や 2–3 ミラー対称性は次章以降で重要である．前章で導入された $Sp(2n,\mathbb{Z})$ 変換等の概念も超対称化される．

## 3.1　3 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称性

前章では 3 次元場の理論とそのゲージ化について議論してきたが，本章ではそれを 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の場合に特化して前章の議論がどう反映されるかを見てみよう．

手始めに，本書で必要になる 3 次元超対称理論の基礎事項について手短にまとめておく．オリジナルの文献は [42] 及び [43] である．特に前者は基礎事項のレビューも含んでいるので初学者にもお薦めしたい．日本語では [44] の一部に関連事項が丁寧に説明されている．本章の内容は 90 年代には既に知られていた古典的な内容であるが，ここではそのなかでも特に次章以降で重要になる内容に焦点を当てる．

超対称ゲージ理論の定式化の詳細は一般に次元や超対称性の数によって異なる．これは主として，フェルミオンによるものである—ワイル（Weyl）フェルミオンやマヨラナ（Majorana）フェルミオンといったフェルミオンは任意の次元に存在するわけではないし，その存在は時空の計量の符号にも依存する．これはどの次元でも存在するスカラー場との大きな違いである．

本書で考えるのは 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称性である．これは 4 つの超対称電荷を持ち，4 次元 $\mathcal{N}=1$ 超対称性の次元還元として理解できる．従って理論構成のかなりの部分は共通する部分がある．

以下の説明では 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の超場形式について手短に説明する．超場形式は便利なフォーマリズムではあるが，実際には本書ではスーパーパートナーを明白に必要とする部分は少ないので超場形式はそれほど必要とするわけ

# 第 4 章
# ツールとしての $S^3$ 分配関数

曲がった空間での超対称性理論やその局所化を 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の $S_b^3$ 分配関数に焦点を置いてまとめる．量子ダイログ関数の等式と超対称ゲージ理論の間を自由に行き来できるようになるのが目標である．

## 4.1 関手としての分配関数

第 3 章でみてきたように，3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論には数々の興味深い性質が存在した．このことは理論の持つ魅力であるが，同時にその複雑さは初学者にとっては負担にもなり得る．読者の中には既に前章で息切れしてしまった方もいらっしゃるかもしれない．前章の内容，少なくともその主要部分を保ちつつ，それをもっとシンプルな議論に置き換えることはできないだろうか？

第 1 章で述べたように，場の理論は物理量を計算する手続きを与えるものと看做すことができる．従って，例えば二つの理論が双対であることを証明するには，二つの理論のありとあらゆる物理量を列挙し，対応する物理量をそれぞれの理論で計算して一致することを示せばよい．

しかし，これは大変な計算であって現実的ではない．それならば，理論が与えられた時に，何か簡単に計算できる量を定義し，それを使って物理を代表させたらどうだろうか？

勿論，ただ 2，3 の量を計算したからといって全ての物理量の情報を不足なく含んでいると期待するのは虫がよすぎるというものであろう：これは一種の「色眼鏡」であって，このフィルターを通すことで見えなくなってしまうものもある．しかし，性質のいい量を考えれば理論の重要な情報を効率良く拾ってくることができるのではないか？ もしこれができれば，場の理論の双対性は二つの場の理論が同じ分配関数を持つという具体的な数学的等式に置き換わることになるのである（図 4.1）[*1]．同様の考え方を既に我々は使っていた：前章の 2–3

*1） より数学的には，**場の理論のなす圏**（**category**，**カテゴリー**）からより具体的な数や

# 第 5 章
# ドメインウォールの物理

本章では，前章で議論した $S_b^3$ 分配関数が 1 次元量子力学の波動関数として再解釈できることをみる．次に，その起源は 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論が 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の境界（ドメインウォール）であることを説明する．このとき，3 次元理論の $Sp(2n,\mathbb{Z})$ 変換は 4 次元理論の双対変換と同定され，またこの設定を超対称化した時，$S_b^3$ 分配関数は $S_b^4$ 分配関数に作用する演算子に同一視されることになる．

## 5.1 $SL(2,\mathbb{Z})$ 作用再訪

前章では $S_b^3$ 分配関数を導入したが，それは 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論を調べるためのツールであった．第 2 章及び第 3 章において我々は 3 次元理論のゲージ化を議論し，そこで $SL(2,\mathbb{Z})$ 作用を導入したが，その作用が $S_b^3$ 分配関数というフィルターを通すことでどう見えるようになるのかを調べてみよう．

第 2 章での記法に従って，$U(1)$ 大域対称性の背景ゲージ場 $A_{\text{背景}}$ とカップルする 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論を考え，ゲージ場 $A_{\text{背景}}$ を含むベクトル多重項 $V_{\text{背景}}$ のクーロンブランチ・スカラーを $\sigma$，3 次元理論の分配関数を $Z(\sigma)$ と書こう．

このとき，$T^k$ の作用は $A_{\text{背景}}$ にレベル $k$ のチャーン＝サイモンズ項を足すことを意味したので，(4.18) を思い出すと

$$T:\, Z(\sigma) \to Z(\sigma)\, e^{-ik\pi\sigma^2}\ . \tag{5.1}$$

一方，$S$ の作用は非対角チャーン＝サイモンズ項を足すことに対応するので，新しく導入された背景ゲージ場を含むベクトル多重項のクーロンブランチ・スカラー $\sigma'$ によって（(4.19) 参照）

$$S:\, Z(\sigma) \to Z'(\sigma') = \int d\sigma\ e^{-2i\pi\sigma\sigma'} Z(\sigma) \tag{5.2}$$

と書かれる．つまり，$SL(2,\mathbb{Z})$ 行列の $S$ 変換は $S_b^3$ 分配関数のフーリエ変換を

# 第 6 章
# 6 次元理論のコンパクト化

6 次元 $(2,0)$ 理論の 3 次元多様体上でのコンパクト化について説明し，そこから 3 次元複素チャーン＝サイモンズ理論が現れることを議論する．

## 6.1 位相的場の理論の出現

### 6.1.1 6 次元理論登場

前章の設定では，3 次元場の理論はとある 4 次元場の理論のドメインウォールと看做すことができた．またその $S_b^3$ 分配関数を計算することで，3 次元理論 $\mathcal{T}$ の $Sp(2n,\mathbb{Z})$ 同値類 $[\mathcal{T}]$ は（$S_b^3$ 分配関数のレベルでは）4 次元場の理論から定まるヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{S^3}$ に作用する演算子 $\hat{\mathcal{T}}$ と看做されることを見てきた．このヒルベルト空間は，4 次元理論を $S^3 \times \mathbb{R}$ で考え，$\mathbb{R}$ 方向を時間と思ったときに $S^3$ に現れるヒルベルト空間であると解釈できるのであった*1)：

$$4 \text{ 次元理論} : S^3 \times \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathcal{H}_{S^3} \ . \tag{6.1}$$

前章では具体的に 4 次元 $\mathcal{N}=4$ 理論及びその質量変形（4 次元 $\mathcal{N}=2^*$ 理論）を考えた．それではより一般の 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論を考えることはできるだろうか？

前章の議論のためには 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の双対性が重要だったので，鍵となるのは，4 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論をその双対性が露わになる形で構成することである．

手がかりは既に第 1 章にある：そこでは 6 次元 $(2,0)$ 理論を 2 次元多様体 $\Sigma_{g,h}$ でコンパクト化することで 4 次元理論が得られたのである（場の理論の幾何学化）．このことと (6.1) を合わせると，考えるのは

$$6 \text{ 次元 } (2,0) \text{ 理論} : S^3 \times \mathbb{R} \times \Sigma \ . \tag{6.2}$$

*1) ここで述べた「4 次元理論のヒルベルト空間」は，通常の意味での 4 次元理論の場の理論よりはずっと小さいヒルベルト空間である．我々は超対称性の一部を保つ $S_b^4$ 分配関数を議論していたのであり，$S_b^4$ 分配関数に寄与しない状態については考慮に入れていない．

# 第 7 章
# 3次元多様体の世界

ここでは 3 次元多様体上の $G_{\mathbb{C}}$ 平坦接続のモジュライ空間とその量子化を議論する．幾何的な $G_{\mathbb{C}}$ 平坦接続は 3 次元多様体の幾何，特に双曲幾何で記述され，その量子化を与えるのが複素チャーン＝サイモンズ理論である．

## 7.1 複素チャーン＝サイモンズ理論

前章で **6 次元理論を 3 次元コンパクト化したときに** $M$ **上に複素チャーン＝サイモンズ理論が現れること，また残りの 3 次元方向に** $\mathcal{N}=2$ **理論が現れること**を見てきた．こうして，我々は **3 次元・3 次元対応（3d/3d correspondence）**[*1)] に辿り着いた．以下我々は，この対応に順次肉付けをしていく．なかでも，一つ鍵となるのは次の主張である[34], [35], [128]~[130]（前章 (6.21) も参照）：

$$Z_{3\text{ 次元 }\mathcal{N}=2\text{ 理論 }\mathcal{T}[M]}[S_b^3 \text{ または } S^1\times S^2]=Z_{3\text{ 次元 }G_{\mathbb{C}}\mathrm{CS}\text{ 理論}}[M]\,. \quad (7.1)$$

この式の非自明さを強調しておこう：右辺では考えている理論はただ一つ（チャーン＝サイモンズ理論）であるが，左辺では右辺の多様体 $M$ の取り方を変えるごとに理論 $\mathcal{T}[M]$ が変わる．また，右辺の理論のゲージ群は非コンパクト群 $G_{\mathbb{C}}$ であるが，左辺のゲージ群はコンパクト群であり，ほとんどの場合 $G$ ではない．さらに，左辺は超対称な場の理論であるが右辺はボソンの自由度のみを持つ．

本章では 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論の詳細に依らずに一般的に議論できる範囲で (7.1) を議論することにしよう．そのために我々はそもそも右辺を正確に理解する必要がある．複素チャーン＝サイモンズ理論とは何であり，その分配関数はどうやって定義されるのか？ 興味深いことに，この一見自明な問いには幾つか微妙な点が存在するのである．

*1）この名前は文献 [128] で付けられた．なお，この対応では両側が 3 次元であるうえ，一般には両側でチャーン＝サイモンズ項を持つ理論が現れるので紛らわしいが，「3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論」「3 次元複素チャーン＝サイモンズ理論」などとして区別することにする．

# 第 8 章

# 古典・量子タイヒュミュラー理論

2 次元リーマン面上での双曲構造の変形を記述するタイヒュミュラー理論及びその量子化についてまとめる．ここでは特に 4 次元理論の赤外理論のループ演算子の期待値に対応する座標（フォック座標）が大きな役割を果たす．

## 8.1　古典タイヒュミュラー理論

### 8.1.1　まず 2 次元から始めよ

前章では 3 次元複素チャーン＝サイモンズ理論について調べ，それに付随した 3 次元双曲幾何及び 3 次元多様体 $M$ 上の $G_{\mathbb{C}}$ 平坦接続について議論した．しかし，3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論との関係を理解するには，より詳細な情報，例えば $G_{\mathbb{C}}$ 平坦接続のモジュライ空間の座標について知ることが必要である．

本章では，その $G_{\mathbb{C}}$ 平坦接続のなすモジュライ空間を，まず 2 次元リーマン面上で調べておこう．第 6 章で述べたように，現れるのは $SL(2,\mathbb{C})$ 平坦接続の空間であるヒッチン系であり，すぐ次に説明するようにその実スライス（$SL(2,\mathbb{R})$ 平坦接続の空間）の一つの連結成分が**タイヒュミュラー空間**（**Teichmüller space**）である．$SL(2,\mathbb{C})$ 接続と $SL(2,\mathbb{R})$ 接続は後者が前者の実スライスという関係にあり，両者の関係は自明ではないが，本章での議論のためには区別に神経質になる必要はない．以下では主として後者の言葉を用いる．

2 次元多様体の場合の本書の解析の大部分は，次章での 3 次元多様体の場合の解析に翻訳することができる．2 次元双曲幾何は前章の 3 次元双曲幾何と深い関係にあり，本章での議論は前章での議論と類似するところもかなり多い[*1)]．

---

*1)　これは双曲空間 $\mathbb{H}^2, \mathbb{H}^3$ の向きを保つアイソメトリーが $PSL(2,\mathbb{C})$ と $PSL(2,\mathbb{R})$ であり片方がもう一方の実スライスであることも大きい．このような関係は $\mathbb{H}^n$ と $\mathbb{H}^{n+1}$ で $n \geq 3$ に対しては成り立たないことに注意されたい．

# 第 9 章
# 四面体分割と 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論

この章ではこれまでの議論を総合して 3 次元超対称場の理論と 3 次元ゲージ理論との関係を整理し，3 次元多様体上の $G_{\mathbb{C}}$ 平坦接続のモジュライ空間とその量子化を議論する．幾何的な $G_{\mathbb{C}}$ 平坦接続は 3 次元多様体の幾何学，特に双曲幾何で記述され，その量子化を与えるのが複素チャーン＝サイモンズ理論である．

## 9.1　2 次元の変化としての 3 次元

前章では 2 次元多様体上の平坦接続を議論した．本章では，そこで学んだことを生かして 3 次元多様体の幾何を理解し，それが 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論にどのような対応物を持つかを調べよう．

基本的な考え方は至ってシンプルである．3 次元チャーン＝サイモンズ理論を理解するには，（ハミルトン形式を取ることにすると）その状態と，その時間発展を理解すればよい．これは，2 次元面上の理論のヒルベルト空間の状態と，その「時間発展」を理解することに対応するが，まさにそれは第 6.1.2 節及び前章で議論したことであった．ここで「時間発展」と書いたのは写像類群の作用である．このとき，写像類群は一つの理想三角形分割を別の理想三角形分割に送るが，それはより具体的には 2 次元面の理想三角形分割のフリップの列から生成された．

これを 3 次元に読み替えてみよう．図 9.1 にあるように，2 次元面でのフリップは 3 次元的には四面体を貼り合わせる操作に対応する．四面体を押しつぶせば裏と表にそれぞれ四角形が現れるという訳だ．四面体はふっくらとした四角のクッションであって，その裏と表にそれぞれ逆の対角線が引かれていると思うと想像しやすい．

2 次元面の理想三角形の頂点は $\mathbb{H}^2$ の境界に存在したので，四面体の頂点も同様の筈である．従って，3 次元の四面体も境界に頂点を持つ四面体，理想四

# 第 10 章

# 終わりに：3次元多様体を超えて

本書は次の問いかけから始まった：**量子場の理論とは何なのだろうか？**

量子場の理論は長い歴史を持つ巨大な体系であり，この問いには決定的な答えを出すことは難しいかもしれない．しかし，物理学の本質はごく少数の原理・原則から複雑な世界を理解することであって，いかに複雑な理論体系であってもスクラップ・ビルドの繰り返しの中でその本質が抽出されてくるのは歴史の教えるところである．

勿論，現時点での筆者は上の問いに対する満足の行く答えを持ち合わせていない．しかし，本書において筆者は，場の理論の一つの（限定されてはいるが，しかし本質的だと筆者が信じている）側面に光をあてることで，量子場理論に再度向き合おうとした—その概念的な問題意識から出発し，それを超対称場の理論での具体的な設定において物理的・数学的に精密に議論しようと試みた．

本書では場の理論の幾つかの側面を強調してきた．まず一つは**繰り込み（renormalization）**の概念，そして場の理論が**低エネルギー有効理論（low-energy effective theory）**であるという認識である．そして繰り込み群の**ユニバーサリティ（普遍性，universality）**の一つの現れが，場の理論の**双対性（duality）**である．さらに，場の理論を**ゲージ化（gauging）**によって結合・分割することで，場の理論の**理論空間（theory space）**に存在する幾何的・代数的構造へと導かれた．つまり，場の理論の**集合**を考えることで初めて現れる構造が存在するのである．

この構造を探るために，我々は 6 次元 $(2,0)$ 理論（M5 ブレーン）の 3 次元多様体でのコンパクト化から出発した（第 6 章）．こうして現れた 3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論（第 3 章）は，$S_b^3$ 分配関数（第 4 章）というツールによって自由自在に解析でき，その結果として現れる理論空間に現れる量子力学系の構造（第 5 章）が，3 次元多様体の量子化から現れる量子力学構造（第 8，9 章）と対応した．

6 次元理論のコンパクト化においては，最初からコンパクト化する多様体の幾何から出発していたので，そこから現れる理論の集合に幾何的な構造が入る

# 付録 A
# 超対称の世界への道標

本書では様々な次元や超対称性を持つ場の理論を考えるので，1 次元から 6 次元まで，各次元の超対称場の理論が一斉に現れる．これは本書の世界の豊穣さの一端を示すものであり，本書では随所にその理論同士の関連を強調するようにしたが，同時に読者にとっては話をややこしくする原因であるかもしれない．そこで本付録では本書に現れる超対称場の理論について手短に整理しておこう．これらについては本文中でも適宜説明されるが，ここでまとめておくのは便利かもしれない．ここでは本書に関係する部分（表 A.1）にしか言及しないが，同様のまとめは例えば [208, Appendix B] 等の教科書にも見つかる．なお，以下では超対称性を off-shell で保つために必要な補助場については述べず，on-shell の自由度のみを列挙する．また，以下では常に $\phi$ は実スカラー場，$\lambda$ はその次元での最小の成分を持つフェルミオンとする．

**6 次元**

6 次元ではワイルフェルミオンが存在し，その成分は $2^{\left[\frac{6}{2}\right]}/2 \times 2 = 8$ 個の実成分を持つ（2 で割ったのはワイル条件のため，また 2 倍したのは複素成分を実数で数えるため）．

本書では 6 次元 $(2,0)$ 理論（但し，$A_N$ 型，ほとんどの部分では $A_1$ 型）を議論する．$(2,0)$ テンソル多重項は $(B_{\mu\nu}, \phi_{1,\cdots,5}, \lambda_{1,2})$ であり，$B_{\mu\nu}$ は $dB = *dB$ を満たす自己双対完全反対称 2–形式及び 5 個の実スカラーを含む．R 対称性は $Sp(4)_R \sim SO(5)_R$ であり，5 個のスカラー $\phi_{1,\cdots,5}$ は $SO(5)_R$ の $\mathbf{5}$ 表現として変換する．

$(2,0)$ テンソル多重項は $(1,0)$ テンソル多重項と $(1,0)$ ハイパー多重項及び $(1,0)$ ハイパー多重項に分解する．$(1,0)$ テンソル多重項は $(B_{\mu\nu}, \phi_1, \lambda_1)$．$(1,0)$ ハイパー多重項 $(\phi_{2,\cdots,5}, \lambda_2)$ は二つの複素スカラー $\phi_2 + i\phi_3, \phi_4 + i\phi_5$ を含む．$(1,0)$ 理論の R 対称性は $Sp(2)_R \simeq SO(3)_R$ である．

# 付録 B
# 古典及び量子ダイログ関数の世界

この付録では，古典及び量子ダイログ関数（二重対数関数，dilogarithm function）の定義とその性質を手短にまとめておく．本文中で議論されるように，これらの特殊関数の持つ性質の多くは直接的なゲージ理論的・幾何的解釈を持ち，その意味において物理的考察からも導くことができる．

## B.1 古典ダイログ関数

**古典ダイログ関数**（**classical dilogarithm function**）と呼ばれるものには，まず**オイラー・ダイログ関数**（**Euler dilogarithm function**）$\mathrm{Li}_2(x)$*1)

$$\mathrm{Li}_2(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = -\int_0^x dt\ \frac{\log(1-t)}{t} \tag{B.1}$$

がある．(B.1) の和の式は $|x| < 1$ のみで収束するが，(B.1) の積分形を使って複素平面上に $\mathrm{Li}_2(x)$ の定義を拡張できる．但し，$\mathrm{Li}_2(x)$ は実軸上 $x > 1$ にカットを持つ．

もう一つは**ロジャーズ・ダイログ関数**（**Rogers dilogarithm function**）$L(x)$ であり，その定義は

$$\begin{aligned} L(x) &:= \mathrm{Li}_2(x) + \frac{1}{2}\log x \log(1-x) \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^x dt \left( \frac{\log(1-t)}{t} + \frac{\log t}{1-t} \right) . \end{aligned} \tag{B.2}$$

この関数は複素平面上にカットを持たないことに注意しよう．

古典ダイログ関数は数多くの公式を満たすことが知られている[209]．その中でも重要なのがアーベル（Abel）による次の**ペンタゴン恒等式**（**五項恒等式**，

*1) この関数は多くの数式処理プログラムに組み込まれている．例えば Mathematica では `PolyLog[2,x]` とすればよい．

# 付録 C
# クラスター代数瞥見

本付録ではクラスター代数についての必要最小限の数学的事実をまとめる．本文で現れた多くの構造，例えばタイヒュミュラー理論のフォック変数とその量子化，フリップのもとでの変換則等はクラスター代数の一般論の特殊例であると看做すことができ，クラスター代数の立場から眺めると見通しが良くなる．

## C.1　箙とミューテーション

本付録では**クラスター代数**（**団代数**，**cluster algebra**）[228]の数学的部分について簡単にまとめておく．クラスター代数は近年様々な分野においてその重要性を増しつつある数学的構造であり（レビューとしては例えば [229] を参照，また最近の数理物理における話題の一端を知るためには [230], [231] も参考になる），本書の内容，特に 2 次元双曲幾何，2 次元タイヒュミュラー理論及び 3 次元双曲幾何の背後に存在する構造である（2 次元双曲幾何との関連については [232], [233] を，3 次元双曲幾何とは [234] をそれぞれ参照せよ）．さらに，クラスター代数は第 10 章でごく簡単に触れられたように，3 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論を定義するデータとしても用いることができる．

まず，手始めに**箙**（**quiver**）を考えることにする．ここで箙とは有向グラフでその辺に向きが付けられたものである．本書ではゲージ理論を定義するデータとして現れた（図 2.1）．

箙の頂点の集合を $I$，その元を $i, j, \ldots \in I$ と書く．技術的な要請のため，箙にはループ及び向きづけられた 2-サイクルは存在しないとする（図 C.1）*1)．この条件は，第 8 章で議論した量子タイヒュミュラー空間の例では満たされることに注意しよう．

箙 $Q$ が与えられたとき，行列 $Q=(Q_{i,j})_{i,j\in I}$ を*2)

*1)　実際の応用例ではこの条件が満たされていないことも起こるので注意が必要である．
*2)　ここでは簡単のため箙と行列に同じ記号を用いる．

# 参考文献


[1] 山崎雅人, “場の理論の分解学”, 数理科学 第 50 巻, 10 月号, 7 (2012), http://member.ipmu.jp/masahito.yamazaki/files/2012/QFT_decompose_science_2012.pdf.

[2] 山崎雅人, “団代数と超対称ゲージ理論”, 数理科学 第 53 巻, 3 月号, 51 (2015), http://member.ipmu.jp/masahito.yamazaki/files/2015/cluster_science_2015.pdf.

[3] 山崎雅人, “物理に託した思い”, パリティ 第 30 巻, 7 月号, 山崎雅人 (2015).

[4] J. Wess and J. Bagger, *“Supersymmetry and supergravity”*, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1983), i+180p.

[5] N. Arkani-Hamed, G. L. Kane, J. Thaler and L.-T. Wang, *“Supersymmetry and the LHC inverse problem”*, JHEP 0608, 070 (2006), hep-ph/0512190.

[6] K. Wilson and J. B. Kogut, *“The Renormalization group and the epsilon expansion”*, Phys.Rept. 12, 75 (1974).

[7] S. Weinberg, *“The quantum theory of fields. Vol. I”*, Cambridge University Press, Cambridge (1995), xxvi+609p, Foundations.

[8] S. Weinberg, *“What is quantum field theory, and what did we think it is?”*, hep-th/9702027.

[9] J. Polchinski, *“Renormalization and Effective Lagrangians”*, Nucl.Phys. B231, 269 (1984).

[10] R. G. Leigh and M. J. Strassler, *“Exactly marginal operators and duality in four-dimensional N=1 supersymmetric gauge theory”*, Nucl.Phys. B447, 95 (1995), hep-th/9503121.

[11] T. Banks and A. Zaks, *“On the Phase Structure of Vector-Like Gauge Theories with Massless Fermions”*, Nucl.Phys. B196, 189 (1982).

[12] S. R. Coleman, *“The Quantum Sine-Gordon Equation as the Massive Thirring Model”*, Phys.Rev. D11, 2088 (1975).

[13] S. Mandelstam, *“Soliton Operators for the Quantized Sine-Gordon Equation”*, Phys.Rev. D11, 3026 (1975).

[14] S. Mandelstam, *“Quantum electrodynamics without potentials”*, Annals Phys. 19, 1 (1962).

[15] A. A. Migdal, *“Loop Equations and 1/N Expansion”*, Phys.Rept. 102, 199 (1983).

[16] S. R. Coleman and D. J. Gross, *“Price of asymptotic freedom”*, Phys.Rev.Lett. 31, 851 (1973).

[17] T. Baks, *“Modern Quantum Field Theory”*, Cambridge University Press (2008), Cambridge, 271p.

[18] J. Polchinski, *“Dualities of Fields and Strings”*, arxiv:1412.5704.

[19] C. Montonen and D. I. Olive, *“Magnetic Monopoles as Gauge Particles?”*, Phys.Lett. B72, 117 (1977).

[20] J. Gomis, T. Okuda and D. Trancanelli, *“Quantum ’t Hooft operators and S-duality in N=4 super Yang-Mills”*, Adv.Theor.Math.Phys. 13, 1941 (2009), arxiv:0904.4486.

[21] C. Romelsberger, *“Counting chiral primaries in N = 1, d=4 superconformal field theories”*, Nucl.Phys. B747, 329 (2006), hep-th/0510060.

[22] J. Kinney, J. M. Maldacena, S. Minwalla and S. Raju, *“An Index for 4 Dimensional Super Conformal Theories”*, Commun. Math. Phys. 275, 209 (2007), hep-th/0510251.

[23] A. Gadde, E. Pomoni, L. Rastelli and S. S. Razamat, *"S-duality and 2d Topological QFT"*, JHEP 1003, 032 (2010), arxiv:0910.2225.

[24] V. Spiridonov and G. Vartanov, *"Elliptic hypergeometry of supersymmetric dualities II. Orthogonal groups, knots, and vortices"*, Commun.Math.Phys. 325, 421 (2014), arxiv:1107.5788.

[25] F. Benini, T. Nishioka and M. Yamazaki, *"4d Index to 3d Index and 2d TQFT"*, Phys.Rev. D86, 065015 (2012), arxiv:1109.0283.

[26] S. S. Razamat and B. Willett, *"Global Properties of Supersymmetric Theories and the Lens Space"*, Commun. Math. Phys. 334, 661 (2015), arxiv:1307.4381.

[27] P. Goddard, J. Nuyts and D. I. Olive, *"Gauge Theories and Magnetic Charge"*, Nucl.Phys. B125, 1 (1977).

[28] N. Seiberg, *"Electric - magnetic duality in supersymmetric nonAbelian gauge theories"*, Nucl.Phys. B435, 129 (1995), hep-th/9411149.

[29] K. A. Intriligator and N. Seiberg, *"Mirror symmetry in three-dimensional gauge theories"*, Phys.Lett. B387, 513 (1996), hep-th/9607207.

[30] M. Aganagic, K. Hori, A. Karch and D. Tong, *"Mirror symmetry in (2+1)-dimensions and (1+1)-dimensions"*, JHEP 0107, 022 (2001), hep-th/0105075.

[31] E. Witten, *"Solutions of four-dimensional field theories via M theory"*, Nucl.Phys. B500, 3 (1997), hep-th/9703166.

[32] D. Gaiotto, *"N=2 dualities"*, JHEP 1208, 034 (2012), arxiv:0904.2715.

[33] Y. Tachikawa, *"N=2 supersymmetric dynamics for pedestrians"*, Lect.Notes Phys. 890, 2014 (2013), arxiv:1312.2684.

[34] Y. Terashima and M. Yamazaki, *"SL(2,R) Chern-Simons, Liouville, and Gauge Theory on Duality Walls"*, JHEP 1108, 135 (2011), arxiv:1103.5748.

[35] T. Dimofte and S. Gukov, *"Chern-Simons Theory and S-duality"*, JHEP 1305, 109 (2013), arxiv:1106.4550.

[36] G. 't Hooft, *"Naturalness, chiral symmetry, and spontaneous chiral symmetry breaking"*, NATO Sci.Ser.B 59, 135 (1980).

[37] C. Beasley, *"Global Aspects of Abelian Duality in Dimension Three"*, JHEP 1408, 146 (2014), arxiv:1405.2123.

[38] J. W. Milnor and J. D. Stasheff, *"Characteristic classes"*, Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, Tokyo (1974), vii+331p, Annals of Mathematics Studies, No. 76.

[39] E. Witten, *"SL(2,Z) action on three-dimensional conformal field theories with Abelian symmetry"*, hep-th/0307041.

[40] C. Burgess and B. P. Dolan, *"Particle vortex duality and the modular group: Applications to the quantum Hall effect and other 2-D systems"*, Phys.Rev. B63, 155309 (2001), hep-th/0010246.

[41] K. A. Intriligator, D. R. Morrison and N. Seiberg, *"Five-dimensional supersymmetric gauge theories and degenerations of Calabi-Yau spaces"*, Nucl.Phys. B497, 56 (1997), hep-th/9702198.

[42] O. Aharony, A. Hanany, K. A. Intriligator, N. Seiberg and M. Strassler, *"Aspects of N=2 supersymmetric gauge theories in three-dimensions"*, Nucl.Phys. B499, 67 (1997),

hep-th/9703110.

[43] J. de Boer, K. Hori and Y. Oz, *"Dynamics of N=2 supersymmetric gauge theories in three-dimensions"*, Nucl.Phys. B500, 163 (1997), hep-th/9703100.

[44] 今村洋介, "超対称 Chern-Simons 理論と M2 ブレーン", 素粒子論研究電子版 1, 今村洋介 (2009), http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~soken.editorial/sokendenshi/vol1/cs-and-m2.pdf.

[45] N. Seiberg, *"Naturalness versus supersymmetric nonrenormalization theorems"*, Phys.Lett. B318, 469 (1993), hep-ph/9309335.

[46] A. Redlich, *"Parity Violation and Gauge Noninvariance of the Effective Gauge Field Action in Three-Dimensions"*, Phys.Rev. D29, 2366 (1984).

[47] A. Redlich, *"Gauge Noninvariance and Parity Violation of Three-Dimensional Fermions"*, Phys.Rev.Lett. 52, 18 (1984).

[48] G. V. Dunne, *"Aspects of Chern-Simons theory"*, hep-th/9902115.

[49] E. Witten, *"An SU(2) Anomaly"*, Phys.Lett. B117, 324 (1982).

[50] E. Witten, *"On flux quantization in M theory and the effective action"*, J.Geom.Phys. 22, 1 (1997), hep-th/9609122.

[51] I. Affleck, J. A. Harvey and E. Witten, *"Instantons and (Super)Symmetry Breaking in (2+1)-Dimensions"*, Nucl.Phys. B206, 413 (1982).

[52] A. Hashimoto, P. Ouyang and M. Yamazaki, *"Boundaries and defects of* $\mathcal{N}=4$ *SYM with 4 supercharges. Part II: Brane constructions and 3d* $\mathcal{N}=2$ *field theories"*, JHEP 1410, 108 (2014), arxiv:1406.5501.

[53] K. Intriligator and N. Seiberg, *"Aspects of 3d N=2 Chern-Simons-Matter Theories"*, JHEP 1307, 079 (2013), arxiv:1305.1633.

[54] K. Hori and C. Vafa, *"Mirror symmetry"*, hep-th/0002222.

[55] S. R. Coleman and B. R. Hill, *"No More Corrections to the Topological Mass Term in QED in Three-Dimensions"*, Phys.Lett. B159, 184 (1985).

[56] C. Closset, T. T. Dumitrescu, G. Festuccia, Z. Komargodski and N. Seiberg, *"Comments on Chern-Simons Contact Terms in Three Dimensions"*, JHEP 1209, 091 (2012), arxiv:1206.5218.

[57] A. Kapustin, B. Willett and I. Yaakov, *"Exact Results for Wilson Loops in Superconformal Chern- Simons Theories with Matter"*, JHEP 1003, 089 (2010), arxiv:0909.4559.

[58] D. L. Jafferis, *"The Exact Superconformal R-Symmetry Extremizes Z"*, JHEP 1205, 159 (2012), arxiv:1012.3210.

[59] N. Hama, K. Hosomichi and S. Lee, *"Notes on SUSY Gauge Theories on Three-Sphere"*, JHEP 1103, 127 (2011), arxiv:1012.3512.

[60] N. Drukker, M. Marino and P. Putrov, *"From weak to strong coupling in ABJM theory"*, Commun.Math.Phys. 306, 511 (2011), arxiv:1007.3837.

[61] C. P. Herzog, I. R. Klebanov, S. S. Pufu and T. Tesileanu, *"Multi-Matrix Models and Tri-Sasaki Einstein Spaces"*, Phys.Rev. D83, 046001 (2011), arxiv:1011.5487.

[62] H. Casini, M. Huerta and R. C. Myers, *"Towards a derivation of holographic entanglement entropy"*, JHEP 1105, 036 (2011), arxiv:1102.0440.

[63] R. C. Myers and A. Sinha, *"Holographic c-theorems in arbitrary dimensions"*, JHEP 1101, 125 (2011), arxiv:1011.5819.

[64] D. L. Jafferis, I. R. Klebanov, S. S. Pufu and B. R. Safdi, *"Towards the F-Theorem: N=2*

*Field Theories on the Three-Sphere"*, JHEP 1106, 102 (2011), arxiv:1103.1181.
[65] H. Casini and M. Huerta, *"On the RG running of the entanglement entropy of a circle"*, Phys.Rev. D85, 125016 (2012), arxiv:1202.5650.
[66] V. Pestun, *"Localization of gauge theory on a four-sphere and supersymmetric Wilson loops"*, Commun.Math.Phys. 313, 71 (2012), arxiv:0712.2824.
[67] F. Benini and S. Cremonesi, *"Partition Functions of $\mathcal{N} = (2, 2)$ Gauge Theories on $S^2$ and Vortices"*, Commun. Math. Phys. 334, 1483 (2015), arxiv:1206.2356.
[68] N. Doroud, J. Gomis, B. Le Floch and S. Lee, *"Exact Results in D=2 Supersymmetric Gauge Theories"*, JHEP 1305, 093 (2013), arxiv:1206.2606.
[69] D. Honda and T. Okuda, *"Exact results for boundaries and domain walls in 2d supersymmetric theories"*, arxiv:1308.2217.
[70] S. Sugishita and S. Terashima, *"Exact Results in Supersymmetric Field Theories on Manifolds with Boundaries"*, JHEP 1311, 021 (2013), arxiv:1308.1973.
[71] K. Hori and M. Romo, *"Exact Results In Two-Dimensional (2,2) Supersymmetric Gauge Theories With Boundary"*, arxiv:1308.2438.
[72] A. Gadde and S. Gukov, *"2d Index and Surface operators"*, JHEP 1403, 080 (2014), arxiv:1305.0266.
[73] F. Benini, R. Eager, K. Hori and Y. Tachikawa, *"Elliptic Genera of 2d $\mathcal{N} = 2$ Gauge Theories"*, Commun. Math. Phys. 333, 1241 (2015), arxiv:1308.4896.
[74] M. Yamazaki, *"Four-dimensional superconformal index reloaded"*, Theor.Math.Phys. 174, 154 (2013).
[75] M. Marino, *"Lectures on localization and matrix models in supersymmetric Chern-Simons-matter theories"*, J.Phys.A A44, 463001 (2011), arxiv:1104.0783.
[76] S. Cremonesi, *"An Introduction to Localisation and Supersymmetry in Curved Space"*, PoS 2013, 002 (2014).
[77] 今村洋介, "調和関数展開による 3 次元分配関数の計算", 素粒子論研究電子版 16, 今村洋介 (2014), http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~soken.editorial/sokendenshi/vol16/imamura.html.
[78] K. Hosomichi, *"A review on SUSY gauge theories on $S^3$"*, arxiv:1412.7128.
[79] G. Festuccia and N. Seiberg, *"Rigid Supersymmetric Theories in Curved Superspace"*, JHEP 1106, 114 (2011), arxiv:1105.0689.
[80] C. Closset, T. T. Dumitrescu, G. Festuccia and Z. Komargodski, *"Supersymmetric Field Theories on Three-Manifolds"*, JHEP 1305, 017 (2013), arxiv:1212.3388.
[81] C. Closset, T. T. Dumitrescu, G. Festuccia and Z. Komargodski, *"The Geometry of Supersymmetric Partition Functions"*, JHEP 1401, 124 (2014), arxiv:1309.5876.
[82] N. Hama, K. Hosomichi and S. Lee, *"SUSY Gauge Theories on Squashed Three-Spheres"*, JHEP 1105, 014 (2011), arxiv:1102.4716.
[83] Y. Imamura and D. Yokoyama, *"N=2 supersymmetric theories on squashed three-sphere"*, Phys.Rev. D85, 025015 (2012), arxiv:1109.4734.
[84] E. Witten, *"Two-dimensional gauge theories revisited"*, J.Geom.Phys. 9, 303 (1992), hep-th/9204083.
[85] S. Giombi and V. Pestun, *"Correlators of local operators and 1/8 BPS Wilson loops on S**2 from 2d YM and matrix models"*, JHEP 1010, 033 (2010), arxiv:0906.1572.
[86] D. Gang, *"Chern-Simons theory on L(p,q) lens spaces and Localization"*, arxiv:0912.4664.

[87] L. F. Alday, M. Fluder and J. Sparks, *"The Large N limit of M2-branes on Lens spaces"*, JHEP 1210, 057 (2012), arxiv:1204.1280.

[88] A. Tanaka, *"Comments on knotted 1/2 BPS Wilson loops"*, JHEP 1207, 097 (2012), arxiv:1204.5975.

[89] A. Kapustin, B. Willett and I. Yaakov, *"Exact results for supersymmetric abelian vortex loops in 2+1 dimensions"*, JHEP 1306, 099 (2013), arxiv:1211.2861.

[90] N. Drukker, T. Okuda and F. Passerini, *"Exact results for vortex loop operators in 3d supersymmetric theories"*, JHEP 1407, 137 (2014), arxiv:1211.3409.

[91] S. Kim, *"The Complete superconformal index for N=6 Chern-Simons theory"*, Nucl.Phys. B821, 241 (2009), arxiv:0903.4172.

[92] Y. Imamura and S. Yokoyama, *"Index for three dimensional superconformal field theories with general R-charge assignments"*, JHEP 1104, 007 (2011), arxiv:1101.0557.

[93] K. Hori, S. Katz, A. Klemm, R. Pandharipande, R. Thomas, C. Vafa, R. Vakil and E. Zaslow, *"Mirror symmetry"*, American Mathematical Society, Providence, RI; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA (2003), xx+929p.

[94] S. R. Coleman, *"More About the Massive Schwinger Model"*, Annals Phys. 101, 239 (1976).

[95] N. Dorey and D. Tong, *"Mirror symmetry and toric geometry in three-dimensional gauge theories"*, JHEP 0005, 018 (2000), hep-th/9911094.

[96] O. Aharony, O. Bergman, D. L. Jafferis and J. Maldacena, *"N=6 superconformal Chern-Simons-matter theories, M2-branes and their gravity duals"*, JHEP 0810, 091 (2008), arxiv:0806.1218.

[97] K. Okuyama, *"A Note on the Partition Function of ABJM theory on $S^3$"*, Prog.Theor.Phys. 127, 229 (2012), arxiv:1110.3555.

[98] P. Putrov and M. Yamazaki, *"Exact ABJM Partition Function from TBA"*, Mod.Phys.Lett. A27, 1250200 (2012), arxiv:1207.5066.

[99] Y. Hatsuda, S. Moriyama and K. Okuyama, *"Exact Instanton Expansion of ABJM Partition Function"*, arxiv:1507.01678.

[100] D. Shale, *"Linear symmetries of free boson fields"*, Trans. Amer. Math. Soc. 103, 149 (1962).

[101] A. Weil, *"Sur certains groupes d'opérateurs unitaires"*, Acta Math. 111, 143 (1964).

[102] J. Leray, *"Lagrangian analysis and quantum mechanics"*, MIT Press (1981), Cambridge, Mass., xvii+271p.

[103] V. Guillemin and S. Sternberg, *"Symplectic techniques in physics"*, second edition, Cambridge University Press (1990), Cambridge, xii+468p.

[104] N. Hama and K. Hosomichi, *"Seiberg-Witten Theories on Ellipsoids"*, JHEP 1209, 033 (2012), arxiv:1206.6359.

[105] N. A. Nekrasov, *"Seiberg-Witten Prepotential From Instanton Counting"*, Adv. Theor. Math. Phys. 7, 831 (2004), hep-th/0206161.

[106] N. Drukker, D. Gaiotto and J. Gomis, *"The Virtue of Defects in 4D Gauge Theories and 2D CFTs"*, JHEP 1106, 025 (2011), arxiv:1003.1112.

[107] D. Gaiotto and E. Witten, *"S-Duality of Boundary Conditions in N=4 Super Yang-Mills Theory"*, Adv.Theor.Math.Phys. 13, 721 (2009), arxiv:0807.3720.

[108] D. Galakhov, A. Mironov and A. Morozov, *"S-Duality and Modular Transformation as a non-perturbative deformation of the ordinary pq-duality"*, JHEP 1406, 050 (2014),

arxiv:1311.7069.

[109] T. Nishioka, Y. Tachikawa and M. Yamazaki, *"3d Partition Function as Overlap of Wavefunctions"*, JHEP 1108, 003 (2011), arxiv:1105.4390.

[110] B. Assel, *"Hanany-Witten effect and SL(2, $\mathbb{Z}$) dualities in matrix models"*, JHEP 1410, 117 (2014), arxiv:1406.5194.

[111] M. Atiyah, *"Topological quantum field theories"*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1410, 175 (1988).

[112] G. Segal, *"The definition of conformal field theory"*, in: *"Topology, geometry and quantum field theory"*, Cambridge Univ. Press (2004), Cambridge, 421–577p.

[113] E. Witten, *"Some comments on string dynamics"*, hep-th/9507121.

[114] S. Cecotti, C. Cordova and C. Vafa, *"Braids, Walls, and Mirrors"*, arxiv:1110.2115.

[115] S. Lee and M. Yamazaki, *"3d Chern-Simons Theory from M5-branes"*, JHEP 1312, 035 (2013), arxiv:1305.2429.

[116] C. Cordova and D. L. Jafferis, *"Complex Chern-Simons from M5-branes on the Squashed Three-Sphere"*, arxiv:1305.2891.

[117] J. Yagi, *"3d TQFT from 6d SCFT"*, JHEP 1308, 017 (2013), arxiv:1305.0291.

[118] Y. Luo, M.-C. Tan, J. Yagi and Q. Zhao, *"Ω-deformation of B-twisted gauge theories and the 3d-3d correspondence"*, JHEP 1502, 047 (2015), arxiv:1410.1538.

[119] N. J. Hitchin, *"The self-duality equations on a Riemann surface"*, Proc. London Math. Soc. (3) 55, 59 (1987).

[120] D. Xie and K. Yonekura, *"The moduli space of vacua of $\mathcal{N} = 2$ class $\mathcal{S}$ theories"*, JHEP 1410, 134 (2014), arxiv:1404.7521.

[121] L. F. Alday, D. Gaiotto and Y. Tachikawa, *"Liouville Correlation Functions from Four-dimensional Gauge Theories"*, Lett. Math. Phys. 91, 167 (2010), arxiv:0906.3219.

[122] G. Vartanov and J. Teschner, *"Supersymmetric gauge theories, quantization of moduli spaces of flat connections, and conformal field theory"*, arxiv:1302.3778.

[123] K. Hosomichi, S. Lee and J. Park, *"AGT on the S-duality Wall"*, JHEP 1012, 079 (2010), arxiv:1009.0340.

[124] H. L. Verlinde, *"Conformal Field Theory, 2-D Quantum Gravity and Quantization of Teichmuller Space"*, Nucl. Phys. B337, 652 (1990).

[125] E. Witten, *"Quantum Field Theory and the Jones Polynomial"*, Commun. Math. Phys. 121, 351 (1989).

[126] S. Elitzur, G. W. Moore, A. Schwimmer and N. Seiberg, *"Remarks on the Canonical Quantization of the Chern-Simons-Witten Theory"*, Nucl.Phys. B326, 108 (1989).

[127] N. Nekrasov and E. Witten, *"The Omega Deformation, Branes, Integrability, and Liouville Theory"*, JHEP 1009, 092 (2010), arxiv:1002.0888.

[128] Y. Terashima and M. Yamazaki, *"Semiclassical Analysis of the 3d/3d Relation"*, Phys. Rev. D88, 026011 (2013), arxiv:1106.3066.

[129] T. Dimofte, D. Gaiotto and S. Gukov, *"Gauge Theories Labelled by Three-Manifolds"*, Commun. Math. Phys. 325, 367 (2014), arxiv:1108.4389.

[130] T. Dimofte, D. Gaiotto and S. Gukov, *"3-Manifolds and 3d Indices"*, Adv. Theor. Math. Phys. 17, 975 (2013), arxiv:1112.5179.

[131] E. Witten, *"Topological Quantum Field Theory"*, Commun.Math.Phys. 117, 353 (1988).

[132] E. Witten, *"Quantization of Chern-Simons Gauge Theory with Complex Gauge Group"*, Commun. Math. Phys. 137, 29 (1991).

[133] E. Witten, *"Analytic Continuation Of Chern-Simons Theory"*, arxiv:1001.2933.

[134] E. Witten, *"Supersymmetry and Morse theory"*, J.Diff.Geom. 17, 661 (1982).

[135] N. Marcus, *"The Other topological twisting of N=4 Yang-Mills"*, Nucl.Phys. B452, 331 (1995), hep-th/9506002.

[136] M. Blau and G. Thompson, *"Aspects of $N_T \geq 2$ topological gauge theories and D-branes"*, Nucl.Phys. B492, 545 (1997), hep-th/9612143.

[137] A. Kapustin and E. Witten, *"Electric-Magnetic Duality And The Geometric Langlands Program"*, Commun.Num.Theor.Phys. 1, 1 (2007), hep-th/0604151.

[138] E. Witten, *"A New Look At The Path Integral Of Quantum Mechanics"*, arxiv:1009.6032.

[139] T. Dimofte, *"Complex Chern-Simons theory at level k via the 3d-3d correspondence"*, arxiv:1409.0857.

[140] D. Gang, N. Kim and S. Lee, *"Holography of 3d-3d correspondence at Large N"*, JHEP 1504, 091 (2015), arxiv:1409.6206.

[141] S. Pasquetti, *"Factorisation of $N = 2$ Theories on the Squashed 3-Sphere"*, JHEP 1204, 120 (2012), arxiv:1111.6905.

[142] C. Beem, T. Dimofte and S. Pasquetti, *"Holomorphic Blocks in Three Dimensions"*, arxiv:1211.1986.

[143] F. Benini and W. Peelaers, *"Higgs branch localization in three dimensions"*, JHEP 1405, 030 (2014), arxiv:1312.6078.

[144] M. Fujitsuka, M. Honda and Y. Yoshida, *"Higgs branch localization of 3d $\mathcal{N} = 2$ theories"*, PTEP 2014, 123B02 (2014), arxiv:1312.3627.

[145] E. Witten, *"(2+1)-Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System"*, Nucl.Phys. B311, 46 (1988).

[146] W. P. Thurston, *"The Geometry and Topology of Three-Manifolds"*, http://library.msri.org/nonmsri/gt3m/.

[147] W. P. Thurston, *"Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1"*, Princeton University Press (1997), Princeton, NJ, x+311p, Edited by Silvio Levy.

[148] 小島定吉, "3 次元の幾何", 朝倉書店 (2002).

[149] 谷口雅彦, 松崎克彦, "双曲多様体とクライン群", 日本評論社 (1993).

[150] D. Rolfsen, *"Knots and links"*, Publish or Perish Inc. (1976), Berkeley, Calif., ix+439p, Mathematics Lecture Series, No. 7.

[151] *"The Knot Atlas"*, http://katlas.math.toronto.edu/wiki/Main_Page.

[152] D. Jungreis, *"Gaussian random polygons are globally knotted"*, J. Knot Theory Ramifications 3, 455 (1994).

[153] R. Myers, *"Simple knots in compact, orientable 3-manifolds"*, Trans. Amer. Math. Soc. 273, 75 (1982).

[154] D. Cooper, M. Culler, H. Gillet, D. D. Long and P. B. Shalen, *"Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds"*, Invent. Math. 118, 47 (1994).

[155] R. M. Kashaev, *"The hyperbolic volume of knots from quantum dilogarithm"*, q-alg/9601025.

[156] H. Murakami and J. Murakami, *"The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot"*, Acta Math. 186, 85 (2001).

[157] H. Murakami, *"An introduction to the volume conjecture"*, in: *"Interactions between hyperbolic geometry, quantum topology and number theory"*, Amer. Math. Soc. (2011), Providence, RI, 1–40p.

[158] S. Gukov, *"Three-dimensional quantum gravity, Chern-Simons theory, and the A polynomial"*, Commun. Math. Phys. 255, 577 (2005), hep-th/0306165.

[159] 藤博之, "結び目不変量と量子場の理論", 数理物理 2012 予稿集.

[160] H.-J. Chung, T. Dimofte, S. Gukov and P. Sułkowski, *"3d-3d Correspondence Revisited"*, arxiv:1405.3663.

[161] J. P. Gauntlett, N. Kim and D. Waldram, *"M Five-branes wrapped on supersymmetric cycles"*, Phys.Rev. D63, 126001 (2001), hep-th/0012195.

[162] R. Dijkgraaf and E. Witten, *"Topological Gauge Theories and Group Cohomology"*, Commun.Math.Phys. 129, 393 (1990).

[163] L. Alvarez-Gaume, J. Labastida and A. Ramallo, *"A Note on Perturbative Chern-Simons Theory"*, Nucl.Phys. B334, 103 (1990).

[164] W. Chen, G. W. Semenoff and Y.-S. Wu, *"Two loop analysis of nonAbelian Chern-Simons theory"*, Phys.Rev. D46, 5521 (1992), hep-th/9209005.

[165] J. Milnor, *"On the existence of a connection with curvature zero"*, Comment. Math. Helv. 32, 215 (1958).

[166] Y. Imayoshi and M. Taniguchi, *"An introduction to Teichmüller spaces"*, Springer-Verlag (1992), Tokyo, xiv+279p, Translated and revised from the Japanese by the authors.

[167] 河野俊丈, "曲面の幾何構造とモジュライ", 日本評論社 (1997).

[168] 長尾健太郎, "3 次元双曲幾何とクラスター代数", 数理物理 2012 予稿集.

[169] N. Drukker, D. R. Morrison and T. Okuda, *"Loop operators and S-duality from curves on Riemann surfaces"*, JHEP 0909, 031 (2009), arxiv:0907.2593.

[170] D. Gaiotto, G. W. Moore and A. Neitzke, *"Framed BPS States"*, Adv.Theor.Math.Phys. 17, 241 (2013), arxiv:1006.0146.

[171] R. C. Penner, *"Universal constructions in Teichmüller theory"*, Adv. Math. 98, 143 (1993).

[172] L. Chekhov and V. Fock, *"Quantum Teichmuller space"*, Theor.Math.Phys. 120, 1245 (1999), math/9908165.

[173] R. M. Kashaev, *"Quantization of Teichmüller spaces and the quantum dilogarithm"*, Lett. Math. Phys. 43, 105 (1998).

[174] Y. Ito, T. Okuda and M. Taki, *"Line operators on $S^1 \times R^3$ and quantization of the Hitchin moduli space"*, JHEP 1204, 010 (2012), arxiv:1111.4221.

[175] J. Teschner, *"From Liouville theory to the quantum geometry of Riemann surfaces"*, hep-th/0308031.

[176] J. Teschner, *"An analog of a modular functor from quantized Teichmuller theory"*, math/0510174.

[177] J. Teschner, *"Quantization of the Hitchin moduli spaces, Liouville theory, and the geometric Langlands correspondence I"*, Adv.Theor.Math.Phys. 15, 471 (2011), arxiv:1005.2846.

[178] L. D. Faddeev and R. M. Kashaev, *"Strongly coupled quantum discrete Liouville theory. II. Geometric interpretation of the evolution operator"*, J. Phys. A 35, 4043 (2002).

[179] N. Drukker, J. Gomis, T. Okuda and J. Teschner, *"Gauge Theory Loop Operators and Liouville Theory"*, JHEP 1002, 057 (2010), arxiv:0909.1105.

[180] R. Kashaev, *"The quantum dilogarithm and Dehn twists in quantum Teichmüller theory"*, in: *"Integrable structures of exactly solvable two-dimensional models of quantum field theory (Kiev, 2000)"*, Kluwer Acad. Publ. (2001), Dordrecht, 211–221p.

[181] E. Witten, *"The Central charge in three-dimensions"*, in: *"Brink, L. (ed.) et al.: Physics and mathematics of strings"*, 530-559p.

[182] R. C. Penner, *"The decorated Teichmüller space of punctured surfaces"*, Comm. Math. Phys. 113, 299 (1987).

[183] W. D. Neumann and D. Zagier, *"Volumes of hyperbolic three-manifolds"*, Topology 24, 307 (1985).

[184] T. Dimofte, *"3d Superconformal Theories from Three-Manifolds"*, arxiv:1412.7129.

[185] Y. Terashima and M. Yamazaki, *"3d N=2 Theories from Cluster Algebras"*, PTEP 023, B01 (2014), arxiv:1301.5902.

[186] K. Hikami and R. Inoue, *"Cluster algebra and complex volume of once-punctured torus bundles and 2-bridge links"*, J. Knot Theory Ramifications 23, 1450006 (2014), arxiv:1212.6042.

[187] W. Floyd and A. Hatcher, *"Incompressible surfaces in punctured-torus bundles"*, Topology Appl. 13, 263 (1982).

[188] M. Lackenby, *"The canonical decomposition of once-punctured torus bundles"*, Comment. Math. Helv. 78, 363 (2003).

[189] F. Guéritaud, *"On canonical triangulations of once-punctured torus bundles and two-bridge link complements"*, Geom. Topol. 10, 1239 (2006), With an appendix by David Futer.

[190] J.-P. Otal, *"Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3"*, Astérisque 10, x (1996).

[191] K. Hikami and R. Inoue, *"Braiding operator via quantum cluster algebra"*, J. Phys. A 47, 474006 (2014), arxiv:1404.2009.

[192] R. M. Kashaev, *"Quantum dilogarithm as a 6j-symbol"*, Modern Phys. Lett. A 9, 3757 (1994).

[193] M. Sakuma and J. Weeks, *"Examples of canonical decompositions of hyperbolic link complements"*, Japan. J. Math. (N.S.) 21, 393 (1995).

[194] D. Futer and F. Guéritaud, *"Explicit angle structures for veering triangulations"*, Algebr. Geom. Topol. 13, 205 (2013), arxiv:1012.5134.

[195] V. Fock and A. Goncharov, *"Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory"*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 103, 1 (2006).

[196] T. Dimofte, M. Gabella and A. B. Goncharov, *"K-Decompositions and 3d Gauge Theories"*, arxiv:1301.0192.

[197] D. Xie, *"Network, Cluster coordinates and N=2 theory I"*, arxiv:1203.4573.

[198] G. K. Francis, *"A topological picturebook"*, Springer-Verlag, New York (1987), xvi+194p.

[199] G. K. Francis, "トポロジーの絵本", シュプリンガー (2005), 笠原 皓司（監訳），宮崎 興二（訳）.

[200] M. Yamazaki, *"Brane Tilings and Their Applications"*, Fortsch.Phys. 56, 555 (2008), arxiv:0803.4474, Master's Thesis.

[201] S. Franco, *"Bipartite Field Theories: from D-Brane Probes to Scattering Amplitudes"*, JHEP 1211, 141 (2012), arxiv:1207.0807.

[202] M. Yamazaki, *"New Integrable Models from the Gauge/YBE Correspondence"*, J.Statist.Phys. 154, 895 (2014), arxiv:1307.1128.

[203] M. Yamazaki, *"Quivers, YBE and 3-manifolds"*, JHEP 1205, 147 (2012), arxiv:1203.5784.

[204] Y. Terashima and M. Yamazaki, *"Emergent 3-manifolds from 4d Superconformal Indices"*, Phys.Rev.Lett. 109, 091602 (2012), arxiv:1203.5792.
[205] J. J. Heckman, C. Vafa, D. Xie and M. Yamazaki, *"String Theory Origin of Bipartite SCFTs"*, JHEP 1305, 148 (2013), arxiv:1211.4587.
[206] A. Strominger, *"Massless black holes and conifolds in string theory"*, Nucl.Phys. B451, 96 (1995), hep-th/9504090.
[207] F. Benini, D. S. Park and P. Zhao, *"Cluster algebras from dualities of 2d N=(2,2) quiver gauge theories"*, arxiv:1406.2699.
[208] J. Polchinski, *"String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond"*.
[209] A. N. Kirillov, *"Dilogarithm identities"*, Prog. Theor. Phys. Suppl. 118, 61 (1995), hep-th/9408113.
[210] L. J. Rogers, *"On Function Sum Theorems Connected with the Series Formula"*, Proc. London Math. Soc. S2-4, 169 (1906).
[211] I. C. Ip, *"The Graphs of Quantum Dilogarithm"*, arxiv:1108.5376.
[212] T. Shintani, *"On a Kronecker limit formula for real quadratic fields"*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 24, 167 (1977).
[213] N. Kurokawa, *"Multiple sine functions and Selberg zeta functions"*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 67, 61 (1991).
[214] L. Faddeev and A. Y. Volkov, *"Abelian current algebra and the Virasoro algebra on the lattice"*, Phys. Lett. B 315, 311 (1993).
[215] L. D. Faddeev and R. M. Kashaev, *"Quantum dilogarithm"*, Modern Phys. Lett. A 9, 427 (1994).
[216] L. D. Faddeev, *"Discrete Heisenberg-Weyl group and modular group"*, Lett. Math. Phys. 34, 249 (1995), hep-th/9504111.
[217] A. Y. Volkov, *"Noncommutative hypergeometry"*, Comm. Math. Phys. 258, 257 (2005).
[218] B. Ponsot and J. Teschner, *"Clebsch-Gordan and Racah-Wigner coefficients for a continuous series of representations of U(q)(sl(2,R))"*, Commun.Math.Phys. 224, 613 (2001), math/0007097.
[219] V. P. Spiridonov, *"Essays on the theory of elliptic hypergeometric functions"*, Uspekhi Mat. Nauk 63, 3 (2008).
[220] S. N. M. Ruijsenaars, *"First order analytic difference equations and integrable quantum systems"*, J. Math. Phys. 38, 1069 (1997).
[221] S. Kharchev, D. Lebedev and M. Semenov-Tian-Shansky, *"Unitary representations of $U_q(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$, the modular double, and the multiparticle q-deformed Toda chains"*, Commun. Math. Phys. 225, 573 (2002), hep-th/0102180.
[222] E. W. Barnes, *"The Genesis of the Double Gamma Functions"*, Proc. London Math. Soc. S1-31, 358.
[223] S. N. M. Ruijsenaars, *"On Barnes' multiple zeta and gamma functions"*, Adv. Math. 156, 107 (2000).
[224] L. Faddeev, *"Modular double of a quantum group"*, in: *"Conférence Moshé Flato 1999, Vol. I (Dijon)"*, Kluwer Acad. Publ. (2000), Dordrecht, 149–156p.
[225] L. D. Faddeev, R. M. Kashaev and A. Y. Volkov, *"Strongly coupled quantum discrete Liouville theory. I: Algebraic approach and duality"*, Commun. Math. Phys. 219, 199 (2001),

hep-th/0006156.
[226] S. Garoufalidis and R. Kashaev, *"Evaluation of state integrals at rational points"*, arxiv:1411.6062.
[227] I. C.-H. Ip and M. Yamazaki, *"Quantum Dilogarithm Identities at Root of Unity"*, arxiv:1412.5777.
[228] S. Fomin and A. Zelevinsky, *"Cluster algebras I: Foundations"*, J. Amer. Math. Soc. 15, 497 (2002).
[229] B. Keller, *"Cluster algebras, quiver representations and triangulated categories"*, arXiv:0807.1960.
[230] "特集：団代数をめぐって–新たな共通構造の認識–", 数理科学 第 53 巻, 3 月号, (2015).
[231] P. D. Francesco, M. Gekhtman, A. Kuniba and M. Yamazaki, *"Special issue on cluster algebras in mathematical physics"*, J.Phys.A A47, M. Yamazaki (2014).
[232] M. Gekhtman, M. Shapiro and A. Vainshtein, *"Cluster algebras and Poisson geometry"*, American Mathematical Society (2010), Providence, RI, xvi+246p.
[233] S. Fomin, M. Shapiro and D. Thurston, *"Cluster algebras and triangulated surfaces. I. Cluster complexes"*, Acta Math. 201, 83 (2008).
[234] K. Nagao, Y. Terashima and M. Yamazaki, *"Hyperbolic 3-manifolds and Cluster Algebras"*, arxiv:1112.3106.
[235] S. Cecotti and C. Vafa, *"Classification of complete N=2 supersymmetric theories in 4 dimensions"*, Surveys in differential geometry 18, 19 (2013), arxiv:1103.5832.
[236] D. Gaiotto, G. W. Moore and A. Neitzke, *"Wall-crossing, Hitchin Systems, and the WKB Approximation"*, arxiv:0907.3987.
[237] M. Alim, S. Cecotti, C. Cordova, S. Espahbodi, A. Rastogi et al., "$\mathcal{N}=2$ *quantum field theories and their BPS quivers"*, Adv.Theor.Math.Phys. 18, 27 (2014), arxiv:1112.3984.
[238] V. V. Fock and A. B. Goncharov, *"Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm"*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 42, 865 (2009).
[239] V. V. Fock and A. B. Goncharov, *"The quantum dilogarithm and representations of quantum cluster varieties"*, Invent. Math. 175, 223 (2009).
[240] B. Keller, *"On cluster theory and quantum dilogarithm identities"*, in: *"Representations of algebras and related topics"*, Eur. Math. Soc., Zürich (2011), 85–116p.
[241] M. Reineke, *"Poisson automorphisms and quiver moduli"*, J. Inst. Math. Jussieu 9, 653 (2010).
[242] R. M. Kashaev and T. Nakanishi, *"Classical and Quantum Dilogarithm Identities"*, SIGMA 7, 102 (2011), arxiv:1104.4630.
[243] M. Kontsevich and Y. Soibelman, *"Stability structures, motivic Donaldson-Thomas invariants and cluster transformations"*, arxiv:0811.2435.
[244] S. Cecotti, A. Neitzke and C. Vafa, *"R-Twisting and 4d/2d Correspondences"*, arxiv:1006.3435.
[245] A. Felikson, M. Shapiro and P. Tumarkin, *"Skew-symmetric cluster algebras of finite mutation type"*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 14, 1135 (2012).

# 記号表

$(x;q)_n, (x;q)_\infty$　$q$-ポッホハンマー記号, 式 (B.8), 174 ページ

$\alpha, \beta, \ldots$　スピノルの足, 式 (3.1), 38 ページ

$\mathbb{H}^3$　3 次元双曲空間, 式 (7.38), 121 ページ

$\Delta, \Delta_i$　理想四面体, 式 (9.2), 149 ページ

$\Gamma$　$PSL(2,\mathbb{C})$ の離散部分群（クライン群）, 式 (7.41), 122 ページ

$\gamma$　双対フォトン, 式 (2.10), 32 ページ

$\hat{y}_i(t)$　量子 $y$ 変数, 式 (C.14), 193 ページ

$\mathcal{A}$　複素化されたゲージ場, 式 (7.2), 111 ページ

$\mathcal{A}_Q$　量子トーラス, 式 (8.23), 141 ページ, 式 (C.19), 194 ページ

$\mathcal{M}_{\text{平坦}}$　平坦接続のモジュライ空間, 式 (7.30), 119 ページ

$\mathcal{T}_{g,h}$　タイヒュミュラー空間, 式 (8.3), 132 ページ

$\mathcal{V}$　モノポール演算子, 式 (3.35), 49 ページ

$\mathfrak{l}$　ロンギチュード, 式 (7.46), 125 ページ

$\mathfrak{m}$　メリディアン, 式 (7.46), 125 ページ

$\mu_k$　頂点 $k$ での箙のミューテーション, 式 (C.2), 189 ページ

$\overline{\sigma}$　複素化された $\sigma$, 式 (4.26), 65 ページ

$\Phi$　カイラル超場（カイラル多重項）, 式 (3.11), 40 ページ

$\mathcal{F}_{\alpha,E}(q)$　共形ブロック, 式 (6.26), 106 ページ

$\mathcal{W}(\Sigma)$　ツイステッド・スーパーポテンシャル, 式 (4.42), 71 ページ

$\Sigma$　カレントを含む線形多重項, 式 (3.19), 42 ページ

$\sigma$　ベクトル多重項のスカラー, 式 (3.13), 40 ページ

$\sigma^\mu$　パウリ行列, 式 (3.3), 39 ページ

$\tau$　複素化された結合定数, 式 (1.13), 14 ページ

$\mathrm{Li}_2(x)$　古典ダイログ関数（オイラー・ダイログ関数）, 式 (B.1), 172 ページ

$\varphi$　リーマン面の写像類群の元, 式 (6.30), 107 ページ

$\zeta$　FI パラメーター, 式 (3.30), 46 ページ

$a$　4 次元のクーロンブランチパラメーター, 式 (5.32), 86 ページ

$b$　$S^3$ の変形パラメーター, 式 (4.4), 61 ページ

$C$　積分サイクル, 式 (7.15), 115 ページ

$C_\alpha, C_{\bar{\alpha}}$　積分サイクルの基底, 式 (7.15), 115 ページ

$e_b(x)$　量子ダイログ関数, 式 (B.21), 176 ページ

$g_5$　5 次元 $\mathcal{N}=2$ 理論のゲージ結合定数, 式 (6.11), 98 ページ

$k$　チャーン＝サイモンズ項のレベル, 式 (3.25), 44 ページ

# 索　引

## 欧字



## ア



## カ

# サ



# タ

## ナ



## ハ

## マ



## ヤ



## ラ

## ワ

**著者略歴**

**山崎 雅人**
やまざき まさひと

1983年 愛知県名古屋市生まれ
2010年 東京大学大学院理学系研究科物理学専攻修了
博士（理学）
2010年 日本学術振興会博士研究員（カブリ数物連携宇宙研究機構）
2010年 プリンストン大学理論科学センター博士研究員
2012年 井上研究奨励賞
2013年 プリンストン高等研究所メンバー，
東京大学カブリ数物連携宇宙研究機構（Kavli IPMU）特任助教を経て准教授
現在に至る
**専門** 素粒子論，場の理論，超弦理論

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ-119
『場の理論の構造と幾何 **3**次元超対称場の理論からその先へ』（電子版）

著 者 山崎 雅人

2019年3月10日 初版発行 ISBN 978-4-7819-9965-4
この電子書籍は2015年9月25日初版発行の同タイトルを底本としています．

数 理 科 学 編 集 部 発行人 森 平 敏 孝
TEL.(03)5474-8816
FAX.(03)5474-8817

ホームページ http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は sk@saiensu.co.jp まで．

発行所 © 株式会社 **サイエンス社** TEL.(03)5474-8500（代表）
〒151-0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1-3-25



組版 三美印刷