April 2020 MATHEMATICAL SCIENCES Number 682

結び目的思考法のすすめ

村 上 順

結び目は古くから人々の暮らしに根付いており，用途に合わせて様々な結び方が使われています．実用的には，ほどけにくいが，簡単に解くことのできる結び目が有用で，「もやい結び」がその典型例です（図 1）．また，装飾にも多く用いられていますが，結び目が数学として本格的に研究されるようになったのはトポロジーの考え方が確立してからといっていいでしょう．

結び目を数学で扱うときは，通常，図 1 のように結び目の両端点をつないでおき，互いに連続変形でうつりあう結び目を同じ結び目と考えます．例えば，もやい結び目の端点を図のようにつなぐと，連続変形では単純な輪にできないような絡まった結び目になります．

連続的な変形で変わらない性質を調べるトポロジーの考え方は，一筆書きの問題を解決した 18 世紀のオイラーに始まるといわれていますが，本格的に研究されるようになったのは 19 世紀の終わり頃からで，基本群やホモロジー群といったものが考案されてからです．そして，1920 年代になると結び目のアレキサンダー多項式が構成されました．結び目の図から定義されたものですが，後に，巡回被覆空間を用いた解釈が与えられ，ジョーンズ多項式が発見されるまでは結び目の唯一無二の多項式不変量として盛んに研究されました．1960 年代になると，コンウェイがアレキサンダー多項式 $\nabla_K(z)$ の満たすスケイン（もつれ）関係式

$$\nabla_{K_+}(z) - \nabla_{K_-}(z) = z\,\nabla_{K_0}(z) \qquad (1)$$

に注目し，さらに代数的タングルというものを導入して 11 交点までの結び目の分類を試みました．ここで式 (1) の K_+, K_-, K_0 は，図 2 の点線の丸の部分だけが異なり，他の部分は同じ 3 つの結び目です．

結び目の補空間を 3 次元多様体として研究する手法も発展しました．任意の 3 次元多様体が，結び目（複数の紐からなる絡み目も含む）に沿った「手術」と呼ばれる操作で構成できることがわかり，目で見える結び目で理解できるようになったのです．さらに 1970 年代になると，基本群の PSL(2, $\mathbb{C}$) 表現を研究していたライリーにより，8 の字結び

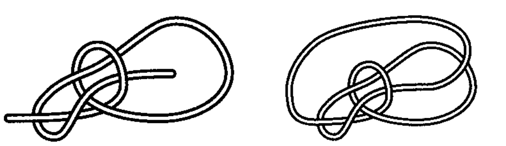

図 1　もやい結び目とその端点をつないだ結び目．

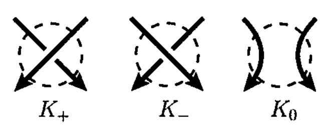

図 2　局所的に異なる 3 つの向きのついた結び目 K_+, K_-, K_0.