May 2020 MATHEMATICAL SCIENCES Number 683

微分方程式の《解》とは何か

方程式が語るものを探る

本多　尚文

1. 微分方程式と現象

微分方程式[*1]とは未知関数とその微分からなる未知関数についての方程式です．良く知られている微分方程式の多くは自然界の現象を記述しています．例えば，波動方程式は電磁波などの波の伝播を記述する方程式ですし，熱伝導方程式は熱の伝播を記述する方程式です．ですから，微分方程式の解の性質を深く調べることでどのような現象が起こるかを知ることができます．簡単な例を通してこのことを見てみましょう．十分離れた2点をゴムひもで結び，3本のピンを使って図1のようにゴムひもの中央部を山形に変形して固定します．次の問題を考えましょう[*2]．

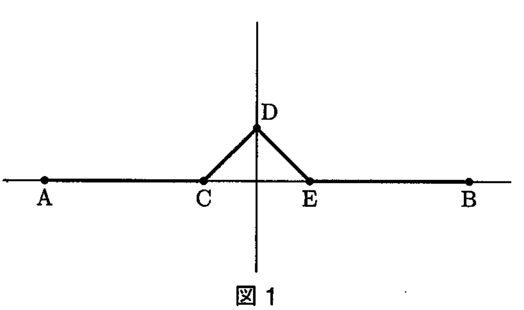

図 1

端点を固定したまま中央にある3本のピンを同時に抜くとその後ゴムひもはどう運動するか？

読者諸氏も少し考えてみて下さい[*3]．$l>0$ を十分大きい実数，xy-平面上ゴムひもの端点の座標は $A(-l,0)$ と $B(l,0)$ とし，3本のピンの座標は $C(-1,0)$，$D(0,1)$，$E(1,0)$ とします．時刻 t，位置 x におけるゴムひもの変位を $u(t,x)$ とします[*4]．ゴムひもの運動は波なので $u(t,x)$ は1次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\kappa^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{1}$$

を満たします（ただし，$\kappa>0$ はゴムひもに依存する定数）．$t=0$ でピンを抜くこととし，ピンを抜く前のゴムひもの形状を表す関数

$$\varphi(x)=\max\{0,1-|x|\}$$

を導入しておきます．$t=0$ でゴムひもの形状は $y=\varphi(x)$ で与えられており，まだ静止していますから

$$u(0,x)=\varphi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=0 \tag{2}$$

なる初期条件を満たします．また，端点 A, B が

*1）特にことわらない限り線形の微分方程式を考える．

*2）重力，摩擦等の影響は無視し理想的な状態とする．

*3）筆者の経験では，大学1年生でゴムひもの正しい運動を予想できる者は数％です．

*4）つまり，時刻 t においてゴムひもの各点は xy-平面上の座標 $(x,u(t,x))$ $(-l\leq x\leq l)$ にある．