まえがき

Clay 財団は 2000 年に，数学の未解決問題を七つ挙げた．それぞれの未解決問題に 100 万ドルの懸賞金がかけられており，従って「ミレニアム懸賞問題」と呼ばれている．そのうちのひとつが「3 次元 Navier-Stokes 方程式の滑らかな解は時間大域的に存在するのか，または解の爆発が起こるのか」である．この未解決問題に関わる研究は Leray(1934) から始まり，Fujita-Kato(1964) による強解の結果（Fujita-Kato の原理）によって飛躍的に進展したが，2019 年 10 月現在，最終的な解決には至っていない．その原因として，Navier-Stokes 方程式に本質的に内在する非線形相互作用を深く洞察する為の数学解析道具が十分にそろっていないからだと思われる．一方で，その非線形相互作用によって生成される乱流は，19 世紀後半の Reynolds のパイプ内にインクを流す実験から始まり，1922 年の乱流のカスケード描像を見出した Richardson，20 世紀半ばに一様等方性乱流の統計理論を確立した Kolmogorov らによる本質的な寄与により，今現在でも活発に研究がおこなわれている．しかしながら，乱流研究サイドでも，非線形相互作用そのものを扱うのは大変難しく，「渦粘性」といった近似化，そして「統計」が主な解析道具となる（最近では「機械学習」も使われるようになってきている）．

上述の現状を踏まえた上で，本書では，非圧縮 Navier-Stokes 方程式，及び非圧縮 Euler 方程式の数学解析について解説する．特に，純粋数学的洞察により流体物理現象の解明に迫る「数理流体力学」への入門を想定している．

そういった偏微分方程式の研究を開始する際，先ずは Hadamard の意味での「**適切性**」から入るのが一般的であろう．**適切性**とは

1. 解の存在
2. 解の一意性
3. 解が初期値に対して連続的に依存する

ことを意味する．本書の主題の一つである**ノルム・インフレーション**（日本語に訳すると “ノルムの急増大” といったところだろうか．数学辞典の第 4 版にも載っていない新しい概念である）は，「解が初期値に対して連続的に依存しない」状況を表している．本書の第 5 章では，この意味における<u>**非適切性**</u>を扱っている．

以下，簡単に各章の説明を行おう．

第 1 章では Fourier 解析の基礎事項について簡単にまとめた．第 2 章で登場する Fourier 級数展開された Navier-Stokes 方程式，及び第 4 章における Sobolev 空間の説明の為の準備である．

第 2 章では「Navier-Stokes 方程式に対するミレニアム懸賞問題」に焦点を当てている．先ず

は，Navier-Stokes 乱流の数値計算などでよく使われる Fourier 級数展開された Navier-Stokes 方程式（常微分方程式）を定義し，その解の存在定理を述べる．微分積分学で習う「連続関数列の一様収束先は連続関数である」さえ把握していれば，その存在定理が理解できるように注力した．これは，ミレニアム懸賞問題を初学者に最短距離で説明する為である（通常の偏微分方程式としての Navier-Stokes 方程式の場合，L^p 空間・Sobolev 空間等の関数空間の設定が必要不可欠で，それらの説明にどうしても時間がかかってしまう）．そのミレニアム懸賞問題に関わる先行研究として Beale-Kato-Majda criterion や Constantin-Fefferman の direction of vorticity, Prodi-Serrin-Ladyzhenskaya type regularity criteria, Caffarelli-Kohn-Nirenberg Theorem などが挙げられるが，紙面の都合上，ここではそれらを思い切って省略した（適宜調べられたい．ただ，5.2 節で使われているアイデアは，その Beale-Kato-Majda criterion の範疇に含まれる）．その代わりに，そのミレニアム懸賞問題の難しさのキーワードとして**vortex stretching**が浮き彫りになるように注力した．

第 3 章では，Lebesgue 積分・Sobolev 空間の基礎事項を簡潔にまとめた．それらの概念をすでに習得されている場合は，この章を読み飛ばして一向に構わない．

第 4 章，第 5 章では，Sobolev 空間 $H^s(\mathbb{R}^d)$ における Euler 方程式の解の存在（一意性）・非適切性を論じている．本書では，その非圧縮 Euler 方程式を洞察する際，Sobolev 空間を

$$s = d/2 + 1 \text{ で } \textbf{critical},\ s > d/2 + 1 \text{ で } \textbf{subcritical}$$

と呼ぶ（d は次元である）．この呼び名は Sobolev の埋め込み定理に由来する．また，第 5 章の非適切性の証明に関しては，Lebesgue 積分を極力使わず，微分積分学だけで核となるアイデアが理解できるように心掛けた．

第 6 章，第 7 章では，純粋数学者の立場から乱流を論じており，本書で述べられているような数学者視点は全く新しい．**乱流研究では「スケール間のエネルギー移動」のメカニズム解明が最も重要な研究課題の一つであり，第 5 章の「Euler 方程式の解のノルム・インフレーション」が，その進展のための重要なカギの一つとなっているのではないか，と本書では指摘している．**

以下に，本書を読むにあたって注意すべき点を羅列しておこう．

- 本書では，正の定数 C を，その都度適当な有限の数とみなす（定数の依存性を強調したほうがよい場合は，その都度強調している）．
- $a \lesssim b$ は，ある定数 $C > 0$ が存在して，$a \le Cb$ を意味する．
- $a \approx b$ は，ある定数 $C > 0$ が存在して，$C^{-1}a \le b \le Ca$ を意味する（ただし，第 6 章に出てくる "$\sim$" は少し意味合いが異なる）．
- $\mathbb{Z}$ は整数全体を表し，$\mathbb{Q}$ は有理数，$\mathbb{R}$ は実数全体を表す．$\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と定義する．
- C^k を C^k 級関数全体とし，C^∞ を無限回微分可能な関数全体とする．
- 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ がコンパクトサポートを持つとは，ある実数 $R > 0$ が存在して

$$f(x) = 0, \quad x \in (-\infty, -R) \cup (R, \infty)$$

  が成立することである（多変数・ベクトル値関数でも同様に定義できる）．それを踏まえた

上で，

$$C_c^\infty(\mathbb{R}) := \{f \in \cap_{k=0}^\infty C^k(\mathbb{R}) : \exists R>0,\ f(x)=0 \quad \text{for} \ \ x \in (-\infty,-R)\cup(R,\infty)\}$$

と定義する（c は英語の compact の略である）．多変数・ベクトル値関数のときも同様に定義する．

- $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$ を $\int f$ と略すことがある．また関数空間に関しても，例えば $L^2(\mathbb{R}^d)$ を L^2 と略すことがある．$\hat{f}(\xi) \in L^2_\xi$ と書く場合は，“関数 $\hat{f}$ の変数 ξ による L^2 ノルムが有限である”，という意味である．
- また f^j $(j=1,2,3,\cdots)$ という関数列を $\{f^j\}_{j=1}^\infty$ と書くが，これを省略して $\{f^j\}_j$ と書くこともある．
- また，日本人，外国人に関わらず，文献情報は人名で述べることにし，それはなるべくアルファベットで表記した（時々カタカナ・漢字で表記されることもある）．

第 6 章は，2017 年の 8 月に東大数理で開催された Summer School 数理物理「乱流とパーコレーション」における筆者自身の講演発表がその原点となっております．そのような発表の機会を与えて下さった河東泰之先生と緒方芳子先生に感謝申し上げます．また，その時の著者の講演内容が，Goto-Saito-Kawahara[26] で述べられている乱流の素過程に通じるものがあると指摘して下さった犬伏正信先生，そして，乱流の画像を快く提供して下さり，さらに第 7 章の執筆内容をチェックして下さった後藤晋先生に感謝申し上げます．第 5 章にまとめている Euler 方程式の非適切性の内容は，2019 年の 7 月 22 日から 8 月 2 日にかけて，アメリカの California 州・Berkeley（MSRI）で開催された Summer School “Recent topics on well-posedness and stability of incompressible fluid and related topics” における筆者自身の連続講演に基づいております．その時に，その非適切性の数学的内容を鋭くチェックして下さった Patrick Heslin 氏に感謝申し上げます．また，本書を執筆するにあたり，様々な助言を下さった澤野嘉宏先生，中井英一先生と向井晨人氏に改めてこの場を借りて感謝申し上げます．最後に本書を恩師・中井英一先生と儀我美一先生、そして父の米田薫に捧げます．

2019 年 10 月

米田 剛

目　次