まえがき

数学と物理学は互いに深め合って進展してきた．数学はより論理性を，物理学はより自然理解を重視する学問である．しかし実際には，数学でも，物理学でも，これらの二つの要素のどちらも欠くことはできない．本来の対象を完全に見失った数学は人工的な印象を与え，論理性を無視した物理学は夢物語になってしまう．

例えば，力学の研究がニュートンによって解析学的な論理性を与えられたことで，近代物理学の基礎が確立されたのは異議を唱えようがない．より極端な意見としては，素数分布や幾何学の研究は数学に分類されているが，根源にある乗法や測量の概念は自然界から抽出されたものであるため，歴史の発展の仕方によっては，物理学に分類されていた可能性も否めないだろう．

このような視点に立てば，数学と物理学の棲み分けは，単に歴史的な経緯であり，これからの進展次第で組み換えが起きることは十分に考えられる．実際，著者の弦理論に関する共同研究者は，ニュートンの国イギリスで研究をしているが，数学科に所属し，しかも，学生は原子核スペクトラムの近似計算を研究していると聞いて驚いた．

戸田盛和，佐藤幹夫，広田良吾など，数えきれない先人の努力により，数学と物理学の境界分野（特に非線形波動方程式の数理構造）は間違いなく日本のお家芸といえる．しかし，残念なことに，日本における数学科と物理学科の交流は意外にも少ない．

本ライブラリは，数理科学の交流を目標に掲げており，数学に近い研究者と物理学に近い研究者の双方が，自分の研究に関連した内容を，数学科や物理学科の学部生や大学院生にもわかるように説明する形を取っている．このように，数学と物理学の交流を深めようとする出版社の努力に敬意を表したい．著者もこれまで，このライブラリを読んで，数えきれないほど感動を覚えてきたため，本書の執筆依頼を受けた際には非常に喜んだ．しかし，原稿を書き進めていくにつれて，「数学科の学生も物理学科の学生もある程度読めるものを」という制限の難しさに直面した．何度も出版社に締切りを再設定してもらい，研究や大学業務の合間で奮闘した結果が本書である．本書が少しでも数学と物理学の交流に役立てば幸いである．

数学と物理学の交差点となる数理物理学は，物理学の問題を数学的に解決したり，物理学から新しい数学的な構造を発見したり，数学を用いて物理学の新しい定式化を提示したりといった様々な視点がある．その中で，本書で紹介する内容は，以下のような視点と経緯で進展してきた数理物理学である．物理学の統一理論として最有力視される M 理論の研究の中で，数学的にも興味深い構造が現れてきた．これらの M 理論の数理構造を解明していった結果，これまでの数学で盛んに調べられてきた，対称多項式の拡張，可積分階層，パンルヴェ方程式などの興味深い対象と，深く関連することがわかってきた．またそれだけでなく，数学で知られていなかった新しい構造も多く現れている．この M 理論は，存在が約 20 年前に提唱されているものの，未だにその全貌は謎に包ま

れたままである．その数理的な構造を詳しく調べることは“M 理論の地図”を次第に明確にし，最終的に M 理論の理解に示唆を与えると期待されている．

本書の流れは次の通りである．最初に物理学における統一理論の研究の方向性を述べ，その統一理論の研究において M 理論が最も重要な候補として注目されるようになった歴史について振り返る．M 理論の研究では，空間 2 次元に拡がる「膜」（とその電磁双対）が主役であること以外，その実体は謎に包まれていた．近年の進展から，膜の上の理論やそこから導かれる行列模型が発見され，M 理論の理解が深まっていった様子を次に説明する．これらの準備をした後に，行列模型の解析に進み，様々な展開や数値計算を援用しながら，行列模型に対して得られた厳密な展開形について解説し，また行列模型が満たす多くの美しい関係式について説明していく．最後に，これからの研究の展望として，どのように M 理論の数理構造が解明されて，M 理論の理解に繋がるかについて述べたい．

さて，ここまで数学と物理学の類似性を前面に出して，本書で解説したい内容を一気に説明してきた．しかし，数学と物理学はかなり異質な側面を持つ．数学の学習では，教科書を開けば，最初に定義が書かれており，その定義に従って様々な定理が導かれる．複雑さはさておき，論理的に内容が整備されており，原理的には十分に時間をかければ理解できるように記述されている．その後の研究において，自力で定理を発見し証明するには，また異なった能力が要求されるが，学習の際にはこれらの困難はほとんど現れない．それに対して，物理学の教科書は，著者がどれだけ丁寧に説明を試みても，学問の特殊性から，これまでの実体験に基づいた未定義用語が溢れ返っている．託宣にも例えられるが，十分に深く理解できないまま，先達の自然観を受け入れて，演習問題に取り組むことにより，いつの間にか理解が進む．研究においても，内容の重要性はさておき，多くの場合，技術的には演習問題の延長線上にあるので，数学研究のような困難に遭遇することは少ない．将棋に例えるならば，数学の学習は，駒の進め方を覚えれば，どんどん複雑な詰め将棋を楽しむことができるが，名人の対局を眺めながら，優勢劣勢を判断するのは難しいことと似ているかもしれない．物理学の学習は，ある意味で，論理的に詰められないまま，最初から棋士の格言を金科玉条として取り入れて，対局に臨んでいるように思える．棋士の深い思考を理解できないまま，格言に従って駒を進めると，なぜか有利になる場合が多い．

数学と物理学の隔たりはまさにこの異質性にあると思われる．数学指向が強い人にとっては，物理学の学習において，意味もわからずに先達の自然観を受け入れることは耐え難い苦痛であるし，逆に物理学指向が強い人にとっては，数学の学習で将来的な問題意識が不明瞭なまま論理を整備することに意義を見出せない．

この隔たりに遭遇して，数学的な構成は無意味だと嘆いたり，物理学の論理は破綻していると嗤ったりして，数理物理学から目をそらすことは簡単だが，それは同時に，多くの重要な点を見落とすことになる．ここでは，数学としても物理学としても未完成であることを認めた上で，少しでも進展させることに重点をおきたい．

しかし，この隔たりは，本書の作成にも同様の困難を与えている．素粒子論は物理学の中でも定義に近い第一原理から出発して，自然の理解を進める学問であるため，より数学に近い立場にあるものの，数学者や数学科の学生が納得できる論理で説明を展開することはほぼ不可能である．特に物理学科で教育を受けてきた著者が，本書において，定義から始め，すべてを論理的に作成するこ

とは困難である．そのため本書でも，典型的な物理学の教科書と似た構成になっている．本書は 3 部構成であり，第 I 部において物理的な背景を簡単に説明し，第 II 部で本書で取り扱う模型を説明した後にその解析を説明し，第 III 部でこの模型に関する数理的な構造を説明する．より数学指向が強い人にとっては，本書を逆に読んだ方が読みやすいかもしれない．つまり，第 II 部で模型の定義を理解した上で，第 III 部で多くの美しい数理的な構造を味わってから，第 II 部でこの模型の数値計算の詳細に進み，最後に第 I 部で物理的な背景を概観する方が読みやすいかもしれない．

特に第 II 部において様々な展開や数値計算の解析を経て到達した，行列模型の位相的弦理論による記述は，本書で俯瞰したい重要なテーマであるが，その結果は予想に予想を重ねて得られたもので，非常に美しい構造を持つものの，数学的に議論を展開することは著者にはできない．また第 III 部の行列模型が満たす様々な関係式は，より数学的に証明を展開することは可能だが，逆に技術的になり過ぎるため，本書ではいくつかの例で説明するに留めた．第 III 部の証明できる内容に対しては例や証明の方針を述べたが，第 II 部の予想には，予想にたどり着いた思考を提示する必要があり，記述に苦心した．しかし，どれほど確固たる証拠を有する予想なのかを読者が判定し，科学を次の段階に進展させるためには，このような部分こそ重要だと考え詳述した．

第 II 部の結果が未解決の予想であることからも想像できるように，本書の特徴として，扱っているテーマと内容が現在進行中の研究であるということが挙げられる．そのため，現時点で著者が考える最も自然な形で提示しているが，多くの結果はこれからの発展次第で，より洗練された形に改良されるだろう．

著者は本書で述べた研究に 10 年間近く取り組んできており，本書はある意味でこれまでの研究成果のまとめである．これから弦理論，M 理論や関連する数理科学の研究に進む学生や研究者が円滑に発展の現状を把握し，さらに大きく発展させられるように，本書が少しでも役に立つことを期待している．

2019 年 12 月

森山 翔文

目　次