

SGC ライブラリ-81

繰りこみ群の物理と数理

問題と解法の探求

伊東 恵一 著

サイエンス社

はじめに

このモノグラフは「繰りこみ群」,あるいは multi-scale analysis と一般に言われる計算法を, 数理学 (物理学から数学まで) を学ぼうという, あるいは専攻する大学の上級から院生を対象として書き下ろしたものである。「繰りこみ群」というものは一種のプラグマティカルな計算技術であるが, 研究対象によって千変万化に変わるので系統的な学問という訳にはいかない恨みがある。

しかもこの技法は計算技法としては, 我々が直面する実解析的難問を解きうる最終兵器にも近い重さをもっていて, それゆえに初心者をつらさせる響きをもっている。実際我々もこの種の論文を読むときには, 大変な計算と評価がいるなど, 一瞬身構えるのも確かである。

他方これが単なる計算技術であるということも正しくない^[57]であろう。マクロな我々の系は, 素粒子やストリング (正しいとして) を支配する微視的方程式から粗視化をへて (究極理論 → 量子場の理論 → アンダーソン局在+シュレディンガー方程式 → ボルツマン方程式, 統計力学, etc.) 得られると期待されるが, これは繰りこみ群の世界である。たとえば文献 [14] を見よ。

というわけで, このモノグラフをどのように構成するか, 幾分悩んだのであるがここでは多種多様な側面, 物理的な意図のはっきりしている問題と, 数学的に面白そうな問題から題材をえらび, そこで使われるアイデアと典型的な計算法を並べ, その「問題の所在地」, 「計算の仕方」を身をもって感じてもらうことにした。ただ繰りこみ群を使って完了した仕事は少なくはないとしても, 一つ一つが大掛かりな論文で簡単に紹介できるものは多くない。というわけで幾分表面的な紹介に終わったかも知れないことを危惧している。また自分の関与した仕事のいくつかは未完成なので, 読者を迷路に迷い込ませないように, 教科書の枠を逸脱しないように気を配った (つもりである)。

繰りこみ群はかなり昔から物理学のテキストには掲載されており, K. Wilson によれば, Bogolyubov-Shirkov の有名な教科書^[4]の神秘的な章 (第 8 章) が彼をしてその研究に当たらせたとそのノーベル賞記念講演^[80]の中で述べている。そこでは 4 次元の量子電気力学 (これは摂動計算で発散が現れ, その処理に朝永先生が繰りこみ理論を開発されたので日本人もその名前を知っているが) における発散処理に導入される高運動量切断 Λ と繰り込まれる前の裸の結合定数 α_0 の関係が論じられ, この理論は結局高運動量切断 Λ をはずす ($\Lambda \rightarrow \infty$) と破綻するという, すなわち裸の電荷の 2 乗が負になってしまうという L. Landau の議論が与えられている。この議論は洗練されて Callan-Symanzik 方程式として, 現在に伝わっている。

この議論は場の理論のモデルは後述する「漸近的自由な理論」しか存在しないという conventional wisdom (便宜的知恵) のはしりであろう。

これから暫くたって, L. Kadanoff や B. Widom 達の臨界現象のスケーリング則の分析やブロックスピン変換のアイデアを 1970 年代に K. Wilson^[78] が統一的に分析, 繰りこみ群の形にまとめたとように思われる。すなわち相転移や臨界現象であられる物理量の発散のさまざまな指数をブロッ

クスピン変換の流れ、スケーリングという概念で包括的にまとめ、かつ当時問題になっていた色々な統計学的モデルに現れる臨界指数を数値的に計算してノーベル賞を受賞して、一般の人（物理学者や数学者）に知られるようになった。

ほぼ同じころ、量子色力学の研究から、この理論が今までのものと異なって「漸近的自由な理論」であり、Landau の否定的結論に対抗しうる少ないモデルのひとつであることがわかった。この研究は当時実験的に検証されていた、高エネルギーでは粒子の相互作用が自由場のように見える（実効的結合定数が零に見える）深非弾性散乱の実験を説明するためには極めて有効なアイデアであった。

このころから繰りこみ群は数学者や数理論物理学者の頭に「解析の道具に使えるもの」というような発想が過ぎるようになり、姿や形をさまざまに変えて使われてきた。

繰りこみ群とはなにかと一言で言うのは難しいかもしれないが結局、自然現象は同じ量でもいろいろなスケールからなり、それらが非線形にからみあって変動することが多い。その分析のため一気呵成に積分できる例はまれで、一方のスケールの自由度から積分または計算していくことが多い。このときもしも、システムの変化が少ないパラメータの変化に入れ込められて、その流れがコントロール可能になるならばシステムの全容がわかると期待される。これは筋書き通りいけば誠に素晴らしく、自由度が無限大の場の理論や統計力学モデルでは、厳密可解などのモデルを除けば、殆ど唯一無二の方法かもしれない。我々が十分賢く忍耐強ければ複雑な系に汎用的に使えるかもしれないが、いかんせんこの複雑さは人間の忍耐に挑んでいるかのようである（文献 [62], p.290）。

読者は、この議論の進展にともなって、これら方程式の解は配位空間（座標空間）と運動量空間の変数からなる関数の積分を通して得られ、その計算を配位空間で局所化して計算しやすい関数に分解して行っていることに気がつくだろう。これは wavelet の概念であり、Feffermann が微分方程式の固有値の漸近分布（Weyl の定理）に相空間の巧妙な分解を用いたことはよく知られる。これは繰りこみ群的発想である。

同じ発想で、この配位空間で積分するとき、 $\exp[-\beta H(\phi)]$ すなわち、エネルギーと、それを実現する空間の体積、すなわちエントロピーでその配位の寄与は決まるが、これも繰りこみ群的発想である。たとえば J. Fröhlich と T. Spencer による難解にしてエレガントな二つの論文、Kosterlitz-Thouless 転移の存在証明 [16] [17] とランダムポテンシャルが十分大きいときの Anderson 局在の証明 [18] はこの意味で、きわめて繰りこみ群的な哲学に基礎を置いている。さらに配位空間という概念から離れても、微分方程式や作用素論の中でも使われている [3] [56], [57]。

数理論物理学と異なって、物理学では上の一つ一つのスケールでの積分の代わりに、無限に薄いスライス (dt) で積分し、無限小のスケール変換を考え、(非線形) 漸化式にあたるものを微分方程式に変え、非線形方程式を研究する場面が多い。これはこの講義録でも扱うが、このようにして 25 年以上も前に Friedan が多様体上に値をとるスピン模型（シグマ模型）を考え、繰りこみ群方程式を得た。これは Ricci Flow 方程式であった。Ricci Flow 方程式 [58], [59] とは以下の非線形の発展方程式（弱放物型である）

$$\frac{d}{dt}g_{ij} = -2R_{ij}(g)$$

である。ここで g_{ij} は多様体 M の Riemann 計量、 R_{ij} はあとで述べる Ricci テンソルである（原論文は [58], [59]、解説論文は [46]）。いったい Ricci flow とは何か、なぜここに現れたか、と

いう疑問が出てくる。我々はこれを d 次元の多様体に値をとるスピンモデルの繰りこみ群方程式をもとに分析し、Ricci flow の特異点が相転移点に他ならないことを示す。そしてスピン系の統計力学の視点からこの問題を再考したい。

さて繰りこみ群が期待される分野は、前世紀からの難問である、Navier-Stokes 方程式が、定常流やある場合には乱流を、はたまた、乱流の場合のエネルギー拡散のコルモゴロフ則からのずれを記述できるかという問題や、物理学者は誰も疑わないクォーク粒子の幽閉問題や、低次元でのシグマ模型での粒子の質量の自発的生成の問題である。このクォーク粒子の幽閉やシグマ模型の質量の自発生成のドグマは余りに強いが上に、誰も「少し変わった人」を除いては反対を唱えないが、これらのドグマが非常に壊れやすい直感の上にしか成り立っていないのも確かである。これらの問題にこのモノグラフの中でけりがつけられれば素晴らしいのだが、それほど甘くないのも確かである。これらについては中途半端であるが、現状報告にとどまった。

結論的にいうと、繰りこみ群というのは、無限次元の空間や自由度が駆け巡る世界での計算法である。それは殆ど不可能であるが、システムがその中でどの方向を好むかに定めを着けてこつこつと流れからずれないように計算していくのである。その流れや計算法はモデルによって様相を変え、それを見極めるのがまず第一歩である。この講義録では幾つかの典型的モデルにおいてどう考察し、流れを見極めるかを紹介したい。

この分野の仕事は昔からかなりの量の計算を必要として、最近はとみにその傾向が強いかもかもしれない。いたずらに複雑な計算はしないと、「複雑難解な計算の果てに真理が見える」というのも否定し得ないことである。「神は細部に宿る」ということであり、これに学問の真髄を見る方もおられ、美を感じる方もおられることは確かである。私はこれは一つの哲学で素晴らしいと思う。

しかしながら他方、読者がこれをみて「こんな計算をしないと仕事ができないのはいやだな」と思われるのも不本意である。そこでこの講義録では、できるだけ簡単な計算で済ませられるよう、流れに必要な計算問題を文中に紛れ込ませて、流し読みできるように書いたつもりである。

Richtiges Aufassen einer Sache und Missverstehen der gleichen Sache schliessen einander nicht vollständig aus.

F. Kafka

教科書若しくは参考書

最後にこの分野での標準的な教科書を掲げる。この中のいくつかは本文中でも引用されている。この全てが繰りこみ変換（群）に直接関連している訳ではないが、基礎知識として重要と思われるものも含めてある。非常にたくさんあるが、自分が目を通したものに限定した。直接に関連しているものは引用文献として最後に掲載してある。

物理学的側面では

1. Constructive Quantum Field Theory, Springer Lec. Notes in Phys. **25**, (1973). The 1973 Ettore Majorana Intl. School of Math. Phys., ed. by G.Velo and A.S. Wightman.
2. J. Glimm and A. Jaffe, Quantum Physics, A Functional Integral Point of View, Springer

Verlag (1981).

3. D. Ruelle, Statistical Mechanics, Benjamin, (1969).
4. B. Simon, The $P(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory, Princeton Univ. Press (1974).
5. V. Rivasseau, From Perturbative to Constructive Renormalization, Princeton Univ. Press (1991).
6. Mathematical Quantum Field Theory I: Field Theory and Many-Body Theory, J. Feldman et al. eds., CRM Proceedings & Lecture Notes vol.7 (1993).
7. Critical Phenomena, Random Systems, Gauge Theories, Les Houches, Session XLIII, 1984, K. Osterwalder and R. Stora, eds. (Elsevier Sci. Publ., 1986).
8. E. Seiler, Gauge Theories as a Problem of Constructive Quantum Field Theory and Statistical Mechanics, Lecture Notes in Physics, **159** (1982) Springer (Berlin).

数学的側面では

1. B. Simon and R. Reed, Methods of Modern Mathematical Physics, vol.1-4, Academic Press (1972).
2. B. Simon, Functional Integration and Quantum Physics, Academic Press (1979).
3. E. Lieb and M. Loss, Analysis, GSM vol.14, (Amer. Math. Soc. 1997).
4. Inequalities, Selecta of H.Lieb, Ed. by M. Loss and M. Ruskai, (2002) Springer.

上手に書かれた入手が容易な日本語の教科書もあって、このモノグラフを書くにあたって大変参考にさせていただいた。

1. ランダムウォークとくりこみ群, 服部哲弥, 共立出版, (2004).
2. 統計力学, 田崎晴明, 培風館, (2008).
3. ゲージ場の量子論 $\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle$, 九後汰一郎, 培風館, (2007).
4. 場の量子論と統計力学, 新井朝雄, 江沢洋, 日本評論社 (1988).
5. ゲージ場の量子論, 近藤慶一, サイエンス社, SGC ライブラリ, No.45.
6. 超関数・フーリエ変換入門, 磯崎洋, サイエンス社, SGC ライブラリ, No.77.

これらはそれぞれに良書であるが、特に物理学側面で引用した Les Houches 講義録 7. の J.Fröhlich の講義は無限大自由度の系をいかに扱うかという点で、今でも新鮮な問題と発想を提起していて、「くりこみ群的発想」の自然さが理解できる。Lieb 先生の不等式の集大成の書は、これとは相補的であるが、物理学の研究から派生する問題の多様さと、それを解決する数学的発想の自由さは感動的である。数理物理学にも色々な流れがあるが、それらの原点ともいえるこの二人の碩学の書は古びることは無いと信じられる。

2010年12月

伊東 恵一

目次

第 1 章	繰りこみ群の原型	1
1.1	イジングモデルまたは $\lambda\phi_d^4$ での繰りこみ群	2
1.2	Dyson 近似	6
1.3	Dyson 近似と $N \rightarrow \infty$ 模型	10
1.3.1	$d = 2$ の場合	12
1.3.2	$d = 4$ の場合	13
1.3.3	Dyson 近似における相関関数 ($d = 4$)	14
1.4	弱結合領域での解析	17
1.5	強結合階層ボソン系	23
1.6	実際の ϕ_d^4 系の議論	27
1.7	その他の ϕ_d^{2n} 模型	29
第 2 章	微分方程式と繰りこみ群	31
2.1	微分方程式への展開	31
2.2	シュレディンガー方程式の低励起状態	32
2.3	微分方程式とブロックスピン変換	35
2.3.1	Dyson 階層近似	36
2.4	シュレディンガー方程式の階層近似	37
2.4.1	$a_0 > 0$ の場合	38
2.4.2	$a_0 < 0$ の場合	40
2.4.3	$ \phi $ が大きい所での寄与	41
2.4.4	遷移領域	42
2.4.5	$ \phi $ が小さい所での寄与	43
2.4.6	繰り返しと全体の流れ	43
2.4.7	$E_2 - E_1$ の評価	44
2.5	WHA 方程式の導出	45
第 3 章	乱流と繰りこみ群	48
3.1	どこでスケール不変性が	48
3.2	Navier-Stokes (NS) 方程式	49
3.3	NS 方程式の積分方程式化と漸化式	49
3.4	単純化	51

3.5	固定点の存在	56
3.6	収束の証明	60
第 4 章	ペレルマンの理論と統計力学	67
4.1	曲面の繰りこみ理論	67
4.2	スピン模型達とその連続極限	69
4.3	発散項と繰りこみ	77
4.4	繰りこみ群方程式	79
4.5	ペレルマン理論と統計力学	80
第 5 章	漸近的自由の起源：σ モデル	88
5.1	2次元 σ 模型	88
5.2	2次元実 σ 模型の分析	93
5.3	W_1 の導出の準備	97
5.3.1	ϕ と ψ のブロックスピン	97
5.3.2	z_0 による積分	98
5.3.3	\hat{H}_0^{-1} の構造と積分可能性	100
5.4	大場領域と大変動領域の処理	103
5.4.1	小さい φ_1 領域での ψ 積分	109
5.4.2	大きい $\psi = \Psi_1 + Q\tilde{\psi}_0$ からの寄与	110
5.5	ポリマー展開と評価	114
5.5.1	行列式と： $\varphi\varphi$ の展開	116
5.5.2	主要項	118
5.6	ブロックスピン変換による流れ	121
第 6 章	クォーク粒子幽閉：未解決問題を考える	125
6.1	クォーク粒子の幽閉とは	125
6.2	繰りこみ群でどう扱うか	128
6.3	階層模型近似と実際の系	128
6.4	desperate physicists	133
6.4.1	Tomboulis 氏のシナリオ	136
6.4.2	間違いは直せるか	139
6.4.3	解決策？	142
6.5	何が問題なのか	143
	おわりに	144
	参考文献	145
	索引	149

第 1 章

繰りこみ群の原型

いわゆる「場の理論」や「統計力学模型の相転移」などを研究する場合、対象すなわち場の変数 $\phi(x)$ やスピン s_x の配置空間 x は無限に広がり、かつ物理法則によって相互に関係している。すなわち $(\phi(x) - \phi(y))^2$ とか $s_x s_y$ というように、これは粒子達がエネルギーを交換すること、または運動量を交換することになり、結局これらの系では広大無辺に広がった相空間で相互作用が絡み合っただけ起こり、そこで議論する必然性が生じてくる。

例えばイジングモデル (Ising model) は強磁性体あるいはフェロマグネット (ferromagnet) のモデルで

$$\begin{aligned}\langle s_\zeta s_\xi \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{s_x = \pm 1} s_\zeta s_\xi \exp[-\beta H(s)], \\ H(s) &= - \sum_{|x-y|=1} s_x s_y, \\ Z &= \sum_{s_i = \pm 1} \exp[-\beta H(s)]\end{aligned}$$

で定義される。パイ中間子の相互作用を記述すると想定される d 次元の ϕ_d^4 模型は形式的に、以下の汎関数積分で定義される：

$$\begin{aligned}S(x_1, \dots, x_n) \\ &= \frac{1}{Z} \int \prod \phi(x_i) \exp \left[-\frac{1}{2} Z_0 \langle \phi, (-\Delta) \phi \rangle \right. \\ &\quad \left. - \int \left(\frac{1}{2} m_0^2 : \phi^2 : (x) + \lambda_0 \int : \phi^4 : (x) \right) dx \right] \times \prod d\phi(x).\end{aligned}$$

($E = R^d$ の各点 x に対しスピン変数 $s_x = \pm 1$ の代わりに、積分変数 $\phi(x) \in R$ が対応していると考えている。) 我々はイジングモデルでは $|\xi - \zeta| \rightarrow \infty$ での振る舞いを、 ϕ^4 模型では相関関数といわれる $S(x_1, \dots, x_n)$ の存在や振る舞いを知りたい。イジングモデルでは温度 $T = \beta^{-1}$ が高かったり、場の理論では結合定数 λ_0 が小さければ、比較的簡単にこれらは指数的に減少することが

第 2 章

微分方程式と繰りこみ群

2.1 微分方程式への展開

微分方程式に繰りこみ群が応用出来ることを最初に示したのはイリノイ大学にいた大野氏とそのグループ^[26]である。発展方程式の一番高い階の微分の係数 a_n が小さいとき、たとえば $|a_n| < \varepsilon$ のとき、この a_n で摂動を考えると時間 t に対してその一次で発散する解（永年項）が出てしまう。例えば

$$\varepsilon \frac{d^2}{dt^2} y + \frac{d}{dt} y + y = 0, \quad \varepsilon > 0, t \geq 0$$

を考えると、その真の解は

$$\begin{aligned} y &= C_1 \exp\left[-\frac{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon} t\right] + C_2 \exp\left[-\frac{1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon} t\right] \\ &\sim C_2 \exp[-(1 + \varepsilon)t] \end{aligned}$$

であるが、

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots$$

として、 ε のオーダーで

$$\begin{aligned} y &= A_0 e^{-t} - \varepsilon A_0 t e^{-t} + O(\varepsilon^2) \\ &= A_0 (1 - \varepsilon t) e^{-t} + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

が得られる。この $\varepsilon A_0 t e^{-t}$ は永年項というが、本来の解からみて発散している。

そこで、 $t = (t - \tau) + \tau$ として τ を A_0 に入れ込み

$$y = A(\tau) e^{-t} - \varepsilon (t - \tau) A(\tau) e^{-t} + O(\varepsilon^2)$$

としてみる。この τ は繰りこみの繰りこみをする点に対応するものであるが、この τ は元の方程式に無かったので $\partial y / \partial \tau = 0$ を要求して

$$\frac{dA}{d\tau} = -\varepsilon A.$$

第 3 章

乱流と繰りこみ群

3.1 どこでスケール不変性が

前の議論からわかるように、繰りこみの思考というのは関数空間で積分するのに、(x 空間または p 空間だけでは局在する関数につくれないので) 相空間で局在分布する関数を取って計算していく、あるいは、ほぼ同じことだが、スケール変化に対して共変なウェーブレット的なもの探していくものである。

流体に目を転ずると、日々目にする乱流、例えば小川の流れのカルマンの渦と山脈の後に出来るカルマンの渦というように、たしかにスケール性がありそうであるが、これを直接に分析した話はあまり聞かない。

私の理解の範囲では、Kraichnan が乱流の intermittency (いつも乱流が起っているわけでは無く、間欠的に乱流が起こり、これがエネルギー散逸に対する Kolmogorov 則からのずれを引き起こすというアイデア) を研究するべく提案した Kraichnan 模型ではランダム力の起源にガウス型確率変数が導入され、確率微分方程式の形で分析され、その研究で繰りこみ群的手法が使われたのが最初である。(文献 [27] とその引用文献を見よ。)

ここでは Navier-Stokes 方程式^[55] の乱流解を直接に扱った Y.Sinai の仕事を紹介する。ここでも前の章で述べたように時間進展に合わせて、スケール変化させて主要部を抜き出している点で前の方法の流れの上にある。

Sinai は撞球のエルゴード性の証明で、卓越したアイデアと計算能力とを示し、繰りこみ群を数学的に研究し始めた第一人者であり、この論文でも素晴らしいアイデアと計算の冴えを見せている。しかしここで得られた解は流れを表す実数解ではなく、フーリエ変換して運動量空間で考えて得られる解析的解なので、元の空間では複素数解になってしまい、非物理的なので割り引いて考えなくてはいけない。

第 4 章

ペレルマンの理論と統計力学

4.1 曲面の繰りこみ理論

歴史的にみると、曲面上に値をとるスピンモデル、 σ モデルの繰りこみに関して、Ricci flow の方程式が出てくることを最初に指摘したのは、Atiyah の学生であった、Friedan^[15] であるが、論文の出版まで時間がかかっている結構難解である*1)。

いままで格子空間の上で主に論理を展開してきたが、いわゆる「場の理論」を摂動的に構成するにあいには、連続空間で計算するので当初から無限大の発散に遭遇してしまう。この処理には、まず切断（格子空間の格子幅の逆数に該当） Λ を導入し、この Λ に対していかに補正項をとるか考えて、有限項が残るように処理する。格子空間でも、いろいろ議論したがこの処理法が繰りこみである。

この章では、Perelman の議論を、色々な曲面上に値をとるスピン系の相転移問題と考えると、それと Ricci flow の関連を見てみたい。 σ 模型は古典統計力学では、 $O(N)$ スピンモデル

$$\langle \vec{s}_0 \vec{s}_x \rangle = \frac{1}{Z} \int \vec{s}_0 \vec{s}_x \exp \left[\beta \sum_{|x-y|=1} \vec{s}_x \vec{s}_y + \sum u(\vec{s}_x) \right] \prod d\vec{s}_x$$

の一般化である。ここに

1. \vec{s}_x は単位球面 S^{N-1} の上に値をとるスピンあるいは一般に適当な多様体に値をとるスピン、
2. $u(\vec{s}_x)$ は外部からの磁場などの作用、

であり、ストリング模型の研究で Polyakov によって導入され、曲がった時空

*1) この部分は [42] の文章をもとに書きおろしたものである。

第 5 章

漸近的自由の起源： σ モデル

前に述べたように、場の理論では漸近的な自由ということがキーワードであって、これを満たさないものは存在しえないというのが、現代数理論物理の conventional wisdom（便宜的な知恵）である。

では何が理由かとなって、最初は「やってみたらそうだった」というのが、当初ヤン・ミルズ理論でそうであることを発見したときの状況だったように思われる。4次元ではヤン・ミルズ理論、2次元では σ モデルというわけで、「一体何者かその性質を保証しているか」ということが問題になる。

この問題をここで論じ、これを用いて2次元の σ モデルの自発的質量生成の証明への、さらにはクォーク粒子幽閉の証明の第一歩にしたい。（次章でクォーク幽閉に触れる。）

5.1 2次元 σ モデル

さて前の章では、Ricci flow の形で、 σ モデルを論じたがまず2次元格子空間の上での σ モデルを考えて、通常のプロックスピン変換を考えてみよう。前章で述べたように

$$\langle \phi_0 \phi_\zeta \rangle = \frac{1}{Z} \int \phi_0 \phi_\zeta \exp \left[-\frac{\beta}{2} \sum_{|x-y|=1} (\phi_x - \phi_y)^2 \right] \prod d\phi_x$$

($\phi \in S^{N-1}$) の振る舞いを問題とする。イジングモデルでは $\langle s_0 s_\zeta \rangle$ は $|\zeta|$ が大きくなると β が小さいときは境界条件によらず指数的に減少し、 β がある値以上では、値は境界条件によって決まる定数に収束する。 S^1 (XY 模型) では、常に $|\zeta|$ が大きくなると0に収束するものの、ある β 以上では $|\zeta|^{-1/\beta}$ 位でしか減少しない (Kosterlitz-Thouless 転移) $N \geq 3$ 以上では、系は常に指数関数的に減少すると信じられており、これは次の章で議論するクォーク粒子の幽閉問題と密接に関連すると信じられている。

第 6 章

クォーク粒子幽閉：未解決問題を考える

我々は 21 世紀にいるが、前世紀の難問が横たわっているのは確かである。繰りこみ群が唯一可能な方法であろうと思われているのにも関わらず、解けていない最大の問題として「クォーク粒子の幽閉」、あるいは英語で quark confinement と呪文のように唱えられる問題が上げられる^{[62] [79]}。これらは現存の手法で解決できるか、正直に言って自信をもてない部分もある。前の章で述べた漸近的自由の起源がこの問題でどうなっているか、じつは分析不足ではあるが、これらについてここで少し立ち入った議論をする。

これらの問題に共通するのは、対象が極めて非線形な集合であって、結合定数に関係なく示されねばならないということで、既に述べた摂動的議論は最初から使えないということである。

6.1 クォーク粒子の幽閉とは

この問題はあまりにも有名であり、現代素粒子論のシナリオの基礎になっている問題で、現在ある世代以上の物理学者または数理物理学者は一度は手を染めた問題であろう。クレイ研究所のミレニアム問題にもなっている。あまりにも困難な故に、若い人は火傷を恐れて最近は手をつけないようである。この問題について最近のお話は^[13]をどうぞ。

25 年ほど前、私は他の同じ世代の人たちと同様に、この問題に情熱を注ぎ、いわゆる階層的な格子の上ではこのシステムが幽閉現象を示すことを示し、実際の系への応用を考えたことがあった。そのギャップは大変試行錯誤を重ねたが、とうとう私にはわからなかった。現在も頭の一部を占めているので、現在の状況を紹介したい。

この問題は現在に至るも何を示したらいいか、どのように証明していいのか、曖昧な部分を含む問題である。ここでは伝統的にまたは古典的に K.Wilson^[79]の格子ゲージ理論の立場で考えることにする。すなわち $\Lambda \subset Z^d$ を単位格子空

おわりに

ここでは数理物理学で未解決の問題をあげ、議論してきた。そのため未解決の問題で煮えきらない議論があったのは、内心忸怩たるものがある。近いうちにこれらについて、新しい知見を議論する機会があることを祈っている。

このモノグラフでは漸近的自由性というのを大きな軸にしてきた。これは1980年代からの場の理論の大きな指針の一つである。

私が院生のころに、ノーベル賞を受賞された益川先生が助手でおられて、場の理論の講義を受けていたが、「 ϕ^4 のグラフを足し上げ、Pade 近似を使うとローパ共鳴が出てくる」と言われたことを、時々思い出す。また量子電気力学の異常磁気能率の計算も16桁ほど合うということも、物理学をかじったことのある人なら周知のことである。これらの理論の非存在と、実験の（不思議な）整合性について、勿論説明は多々あるとしても落ち着いて考えてみてもいいかと自省することも多い。

カフカの警句を最初の章に入れた理由でもある*1)。

*1) この有名なアフォリズムは「ニヤッ」と笑ってやりすごし、机に向かうのが正しい対処法です、言うまでもありませんが。

参考文献

- [1] K. Aoki, Introduction to the non-perturbative renormalization group and its recent applications, *Int. Jour. Mod. Phys.*, **14**, 1249–1326 (2003).
- [2] K.-I. Aoki, A. Horikoshi, M. Taniguchi and H. Terao, Non-perturbative Renormalization Group Approach to Dynamical Chiral Symmetry Breaking, *Prog. Theor. Phys.*, **108**, 571–590 (2002).
- [3] V. Bach, J. Fröhlich and I.M. Sigal, Renormalization Group Analysis of spectral Problems in Quantum Field Theory, *Adv. in Math.*, **137**, 205 (1998).
- [4] N.N. Bogolyubov and D.V. Chirkov, *Introduction a la theorie quantiques des champs*, (Dunod, Paris, 1960).
- [5] C. Borgs and E. Seiler, Lattice Yang-Mills theory at non-zero temperature and the confinement problem, *Commun. Math. Phys.*, **91**, 329 (1983).
- [6] P.M. Bleher and Y.G. Sinai, Investigation of the critical point in models of the type of Dyson’s hierarchical models, *Commub. Math. Phys.*, **33**, 23 (1973).
- [7] D. Brydges, A. Short Course on Cluster Expansion, Les Housch Summer School, Session XLIII (1984), ed by K. Osterwalder et al. (Elsevier Sci. Publ).
- [8] D. Brydges, J. Dimock and P. Mitter, unpublished note on S^N spin model (2010).
- [9] S. Caracciolo, R. Edwards and A. Sokal, *Phys. Rev. Letters*, **74**, 2969 (1995); *ibid.*, **75**, 1891 (1996).
- [10] H. Chiba, C^1 Approximation of vector fields based on the Renormalization group methods, *SIAMj. on Appl. Dyn. Syst.*, **7**, 895 (2008).
- [11] H. Chiba, Simplified RG equations for ODEs, *J. Diff. Equ.*, **246**, 1991 (2008).
- [12] F.J. Dyson, Existence of a phase transition in a one-dimensional Ising Ferromagnet, *Commun. Math. Phys.*, **12**, 91 (1969).
- [13] 江口徹, ヤナーミルズ理論, ミレニアム賞問題, *数学セミナー増刊*, 39–41 (2010, July).
- [14] L. Erdős, M. Salmhofer and H.T. Yau, Quantum diffusiuin of the Random Schroedinger evolution in the scaling limit, [arXiv:0502025](https://arxiv.org/abs/0502025), 7 Feb. 2005.
- [15] D.H. Friedan, Nonlinear Models in $2+\epsilon$ dimensions, *Ann.Phys.*, **163**, 318–419 (1985).
- [16] J. Fröhlich and T. Spencer, The Kosterlitz-Thouless Transition in 2D Abelian Spin Systems and the Coulomb Gas, *Commun. Math. Phys.*, **81**, 527 (1981).
- [17] J. Fröhlich and T. Spencer, Massless Phases and Symmetry Restorations in Abelian Gauge Theory and Spin System, *Commun. Math. Phys.*, **83**, 411 (1982).
- [18] J. Fröhlich and T. Spencer, Absence of Diffusiosin the Anderson Tight Binding Model for large Disorder or Low Energy, *Commun. Math. Phys.*, **88**, 151 (1983).
- [19] K. Gawedzki and A. Kupiainen, A Rigorous Block Spin Approach to Massless Lattice Theories, *Commun. Math. Phys.*, **77**, 31–64 (1980).
- [20] K. Gawedzki and A. Kupiainen, Renormalization Group Study of of a Critical Lattice Model, *Commun. Math. Phys.*, **82**, 407–433 (1981).
- [21] K. Gawedzki and A. Kupiainen, Non-Gaussian fixed points of the block spin transformations. Hierarchical Approximation. *Commun. Math. Phys.*, **89**, 191–220 (1983).

- [22] K. Gawedzki and A. Kupiainen, Non-Gaussian scaling limits. Hierarchical model approximation, *Jour. Stat. Phys.*, **35**, 267 (1983).
- [23] K. Gawedzki and A. Kupiainen, Massless Lattice ϕ_4^4 Theory: A Non-perturbative Control of a Renormalizable Model, *Commun. Math. Phys.*, **99**, 197 (1985); *Phys. Rev. Letters*, **54**, 92 (1985).
- [24] K. Gawedzki, Lectures on conformal field theory, *Quantum Fields and strings*, (Princeton, 1996–7).
- [25] J. Glimm, A. Jaffe and T. Spencer, The Particle Structure of the Weakly coupled $P(\phi)_2$ Model and Other Applications of Cluster Expansion, in : *Constructive Quantum Field Theory*, *Lec. Notes in Phys.*, eds. V. Velo and A.S. Wightman, **25**, (1973).
- [26] N. Goldstein, O. Martin, Y. Oono and F. Liu, Anomalous dimensions and the renormalization Group in a non-linear diffusion process, *Phys. Rev. Lett.*, **64**, 1361–1364 (1990).
- [27] A. Kupiainen and P. Muratore-Ginanneschi, Scaling, Renormalization and statistical conservation laws in the Kraichnan model of turbulentvection, [ArXiv:nlin/060303v1](https://arxiv.org/abs/nlin/060303v1), 14 March 2006.
- [28] E.F. Guild, and D.H.U. Marchetti, Renormalization Group flow of the two-dimensional hierarchical Coulomb Gas, *Commun. Math. Phys.*, **219**, 671–702 (2001).
- [29] A. Guth, Existence Proof of a non-confining phase in 4D $U(1)$ lattice gauge theory, *Phys. Rev. D* **21**, 2291 (1980).
- [30] T. Hara, A Rigorous Control of Logarithmic Corrections in 4D ϕ^4 Spin Systems I, *J. Stat. Phys.*, **47**, 57 (1987).
- [31] T. Hara and H. Tasaki, A Rigorous Control of Logarithmic Corrections in 4D ϕ^4 Spin Systems II, *J. Stat. Phys.*, **47**, 99 (1987).
- [32] T. Hara, T. Hattori and H. Watanabe, Triviality of Hierarchical Ising Model in Four Dimensions, *Commun. Math. Phys.*, **220**, 13–40 (2001).
- [33] 服部哲弥, ランダムウォークとくりこみ群, 共立出版, (2004).
- [34] E. D’Hoker, *String Theory*, (Princeton, 1996–7).
- [35] G. ’t Hooft, *Nucl. Phys.* **B138**, (1978) 1; **B153**, 141 (1979).
- [36] K. Hosaka, Triviality of Hierarchical Models with Small Negative ϕ^4 Coupling in 4D, *J. Stat. Phys.*, **122**, 237–253 (2006).
- [37] K.R. Ito, Permanent quark confinement in 4D hierarchical lattice gauge theories of Migdal-Kadanoff type, *Phys. Rev. Letters*, **55**, 558 (1985).
- [38] K.R. Ito, Origin of Asymptotic Freedom, *Phys. Rev. Letters*, **58**, 439 (1987).
- [39] K.R. Ito, Renormalization Group Flow of Two-Dimensional Hierarchical Heisenberg Models of Dyson-Wilson Type, *Commun. Math. Phys.*, **137**, 25 (1991).
- [40] K.R. Ito and H. Tamura, N-dependence of Upper Bounds of Critical Temperature of 2D $O(N)$ Spins, *Commun. Math. Phys.*, **202**, 127 (1999).
- [41] K.R. Ito, Approximate Renormalization Group recursion formulas in 2D $O(N)$ Spin Models, *J. Stat. Phys.*, **107**, 821 (2002).
- [42] 伊東恵一, 数理解物理学的視点(繰りこみ群)からみたベレルマン理論, 数理解物理への誘い, **7**, 63 (2010) (遊星社).
- [43] K.R. Ito and E. Seiler, On the recent paper on quark confinement by Tomboulis, [hep-th/0711.4930v1](https://arxiv.org/abs/hep-th/0711.4930v1)
- [44] K.R. Ito and E. Seiler, Further discussion of Tomboulis’ approach to the confinement problem,

- [45] K.R. Ito and E. Seiler, Critical Discussion of Tomboukis's approach to the confinement problems, 8th Conf. Quark Confinement and the Hadron Spectrum, Mainz (Sept., 2008), PoS (<http://pos.sissa.it>).
- [46] B. Kleiner and J. Lott, Notes on Perelman's papers, [arXiv:math:DG:0605667v2](https://arxiv.org/abs/math/0605667v2) 21 Feb 2007.
- [47] 小林亮一, 対数 Sobolev 不等式, エントロピー公式, Riemann 幾何的熱浴, 数学, 第 60 卷 3 号, pp.225–247 (2008 Sept.).
- [48] 小園英雄, ナヴィエーストークス方程式の今, ミレニアム賞問題, 数学セミナー増刊, pp.111–118 (2010, July).
- [49] T. Kunihiro, A geometrical formulation of the RG method for global analysis, Prog. Theor. Phys., **94**, 503 (1995).
- [50] T. Kunihiro, The renormalization Group method applied to asymptotic analysis of vector field, Prog. Theor. Phys., **97**, 179 (1997).
- [51] 国広悌二, 微分方程式の縮約と包絡線, 日本物理学会誌, **65**, No.9, 683 (2010).
- [52] Dong Li, On a non-linear Recurrent relation, [arXiv:0902.0804v1](https://arxiv.org/abs/0902.0804v1), 4 Feb. 2009.
- [53] R.A. Minlos, Introduction to Mathematical Statistical Physics, Univ. Lec. Ser. vol.19, (AMS, 2000).
- [54] A.A. Migdal, Recursion equations in gauge field theories, JETP **69**, 810 (1975); L. Kadanoff, Notes on Migdal's recursion formulas, Ann. Phys. **100**, 359 (1976).
- [55] 岡本久, オイラー方程式・ナヴィエーストークス方程式の背景, 数学セミナー vol. 49, No.2581, p.8 (ナヴィエーストークス方程式特集号, Feb. 2010), およびここに掲載の論文と引用文献.
- [56] 大野克嗣, くりこみ, 現象論, そして漸近解析, 数理科学, **35**, No.4, 30 (1997).
- [57] 大野克嗣, 非線形とくりこみ, 日本物理学会誌, **52**, No.4, 13 (1997).
- [58] G. Perelman, The Entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, [arXiv:math.DG/021159](https://arxiv.org/abs/math/021159) v1, 11 Nov. 2002.
- [59] G. Perelman, Ricci Flow with surgery on three-manifolds [arXiv:math.DG/0303109](https://arxiv.org/abs/math/0303109) v1, 10 Mar. 2000.
- [60] J. Polchinski, String Theory, vol. 1, Chap.3 (Cambridge, 1998).
- [61] 特集 Ricci flow, 数学セミナー, 2004 September.
- [62] V. Rivasseau, From Perturbative to Constructive Renormalization, Princeton Series in Phys., (1991, Princeton).
- [63] V. Rivasseau, Cluster Expansions with Small/Large Conditions, in : Mathematical Quantum Field Theory I, Field Theory and Many-Body Theory, eds. J. Feldman et al., CRM Proceedings & Lecture Notes, **7** (1993, AMS).
- [64] E. Seiler, Lattice Gauge Theory as a Problem of Constructive Quantum Field Theory and Statistical Mechanics, Lecture Notes in Physics 159, (Springer Verlag, Heidelberg and New York 1982).
- [65] Y. Sinai and D. Li, Blow ups of complex solutions of the 3D Navier-Stokes systems, J. Eur. Math. Soc., 10(2), 267–313 (2008).
- [66] T. Spencer and M.R. Zimbauer, Spontaneous Symmetry Breaking of a Hyperbolic σ model in 3 Dimensions, Comm. Math. Phys., **252**, 167–187 (2004).
- [67] T. Spencer, M. Disertori and M.R. Zimbauer, Quasi-diffusion in a 3D Supersymmetric Hyperbolic Sigma Model, [arXiv\[math-ph\]:0910.1652v1](https://arxiv.org/abs/math-ph/0910.1652v1), 12 Jan 2009.

- [68] A. Jaffe and E. Witten, Quantum Yang-Mills Theory, Clay Mathematics Institute, <http://www.claymath.org/millennium/Yang-Mills.Theory>.
- [69] T. Kanazawa, private communication to K.R. Ito.
- [70] G. Mack and V.B. Petkova, Sufficient condition for confinement of static quarks by a vortex condensation mechanism, *Ann. of Physics*, **123**, 117 (1980).
- [71] J. Milnor, モース理論, 吉岡出版 (1968).
- [72] C. Newman, Inequalities for Ising Models and Field Theories which Obey the Lee-Yang Theorem, *Commun. Math. Phys.*, **41**, 1 (1975).
- [73] B. Simon, Semiclassical Analysis of Low Lying Eigenvalues I, Non-degenerate Minima: Asymptotic Expansions, *Ann. Inst. Henri Poincare*, vol. XXXVIII, 295–307 (1983).
- [74] B. Simon, Semiclassical Analysis of Low Lying Eigenvalues II, Tunneling, *Ann. Math.* **120**, 89–118 (1984).
- [75] B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press (1979).
- [76] E.T. Tomboulis, Confinement for all values of the coupling in 4D SU(2) gauge theory, [hep-th/0707.2179v1](https://arxiv.org/abs/hep-th/0707.2179v1)
- [77] F. Wegner and A. Houghton, *Phys. Rev.* **A8**, 401 (1973).
- [78] K. Wilson and J. Kogut, *Phys. Report*, **12**, 75 (1974).
- [79] K. Wilson, Confinement of quarks, *Phys. Rev.* **D10**, 2445 (1975).
- [80] K. Wilson, 1982年ノーベル賞講演, 邦訳, くりこみ群と臨界現象, *日本物理学会誌*, **39**, No.2, pp.81–101 (1984).
- [81] 柳沢卓, 「シナイの論文の解説」, 個人的ノート (2008) : On the paper “Blows Ups of Complex Solutions of the 3D Navier-Stokes Systems and RG method” by Ya Sinai et al., *数理解析研究所講究録* **1600**, 132–156 (2008).

索引

ア

イジングモデル 1
インスタント計算 32
ウィナー測度 33
ウェーブレット 48
運動量空間 5
永年項 31
襟領域 104
エルゴード性 48
エルミート多項式 57

カ

階層的距離 15
階層模型 6
回廊領域 104
ガウス分布 4
ガウス変数 4
確率微分方程式 48
強磁性体 1
強磁性体相互作用 8
強磁性的 8
クォーク粒子の幽閉 125, 126, 128
クォーク粒子幽閉 88, 133
クラスター展開 97
繰りこみ群 2
繰りこみ群方程式 22
繰りこみ漸化式 22
繰りこみをする点 31
クリストフェルシンボル 72
クロックモデル 29
高温展開 2, 133
固定点 54

サ

差分 2
敷石集合 104, 110
実効的相互作用 5

自発的質量生成 88
小場 104, 105
小場配位 104, 105, 116
小場領域 104, 110
スケール変換 2, 3
ストリングテンション 126
スピン 1
摂動論 32
漸化式 51
漸近的自由 22
漸近の自由の起源 128
漸近的振る舞い 32
相関関数 1

タ

大場 103
大場配位 103
大場領域 103, 110
大偏差理論 90
短距離相関 4
短距離における漸近的自由 77
中心極限定理 90
長距離における漸近的自由 77
低エネルギー固有値 32
特性関数展開 127

ハ

場の理論 2
汎関数積分 1
非圧縮条件 50
ヒエラルキカル模型 6
非線形積分方程式 50
非線形漸化式 57
フェロマグネチック 90
フェロマグネット 1
ブロックスピン変換 2, 88
ブロックスピン変換作用素 3
苞絡線 32

ポリマー展開 97, 112

マ

ミレニアム問題 49

面積則 133

ヤ

焼きいれ 69

焼きなまし 69

揺れ 4

揺動場 4

ラ

乱歩 93

乱流解 51

ワ

ワインボトル型ポテンシャル 16

欧字

3重臨界点 29

annealed 69

asymptotic free at long distances 77

asymptotic free at short distances 77

asymptotic freedom 22

Bleher-Sinai argument 14

Bleher-Sinai 型議論 14, 21

Bleher-Sinai の方法 32

Christoffel's symbol 72

clock model 29

cluster expansion 97

collar region 104

corridor region 104

decimation 2, 129

Dyson-Wilson 型階層模型 7, 124

Dyson 階層近似 9, 23

Dyson 型階層模型 7

ferromagnet 1

ferromagnetic 90

fluctuation 4

fluctuation field 4

hierarchical model 6

intermittency 48

irrelevant な項 21

Ising model 1

Kosterlitz-Thouless transition 90

Kosterlitz-Thouless 相 133

Kosterlitz-Thouless 転移 47, 88, 90, 93

Kraichnan model 32

Kraichnan 模型 32, 48

large field 103

large field configuration 103

large field problem 10, 17

large field region 103, 110

large field 問題 10

Lee-Yang 定理 69

Leray 射影演算子 50

marginal な項 21

Migda-Kadanoff 型階層モデル 128

Navier-Stokes 方程式 48, 49, 58

paved set 104, 110

ϕ^4 模型 1

ϕ_4^4 模型の自明性 14

Poisson 方程式 3

polymer expansion 97

Potts モデル 29

quark confinement 125, 133

quenched 69

relevant な項 21

Ricci Tensor 72

self-avoiding walk 93

small field	104, 105	Trotter 積公式	33
small field configuration	104, 105	WHA 方程式	34
small field region	104, 110	Wiener 測度	33
spontaneous mass generation	93	Wilson loop	133
string tension	126		

著者略歴

伊東 恵一

いとう けいいち

1949年 青森県生まれ

1972年 東京工業大学理学部物理学科卒業

1977年 京都大学大学院理学研究科物理学第二博士課程修了
理学博士（京都大学）

London 大学研究員, Bielefeld 大学 Zif 客員教授,
江南短期大学教授, などを経て

1994年 摂南大学理工学部教授

現在 立教大学数理物理学研究センター客員研究員

主要著書

Quantum and Non-Commutative Analysis (Editor), (Kluwer Academic Publ. 1993)

数理物理学への誘い, vol. 7 (共著) (遊星社, 東京, 2010)

数理物理学の方法 (ノイマン コレクション) (編訳) ちくま学芸文庫 (筑摩書房, 東京, 2013)

現在の専門 数理物理学, 応用解析学

現在の研究 本書で論じられた未解決問題, 多体粒子系の力学

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ-81

『繰りこみ群の物理と数理 問題と解法の探求』(電子版)

著者 伊東 恵一

2020年3月10日 初版発行 ISBN 978-4-7819-9968-5

この電子書籍は2011年3月25日初版発行の同タイトルを底本としています。

数 理 科 学 編 集 部

発行人 森 平 敏 孝

TEL.(03)5474-8816

FAX.(03)5474-8817

ホームページ <https://www.saiensu.co.jp>

ご意見・ご要望は sk@saiensu.co.jp まで。

発行所 © 株式会社 **サイエンス社**

TEL.(03)5474-8500 (代表)

〒151-0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1-3-25

本誌の内容を無断で複写複製・転載することは、著作者および出版者の権利を侵害することがありますので、その場合にはあらかじめサイエンス社著作権担当者まで許諾をお求めください。

組版 三美印刷