まえがき

数学は知識の体系であると同時に技術の体系でもある．したがってその十全な運用にはある程度の習熟が必要となる．この点，スポーツ・武道・音楽・技芸・遊戯などと何ら変わるところはない．

本書は，学習者が平常身につけた数学にさらに習熟し，国公私立大学の編入学試験を突破できる強固な数学力を養成する手助けとなるよう編集された．運動や音楽に例えるなら，基本動作・基本技やそれらを組み合わせた一連の動作についてある程度の練習を積んできた者が，試合での勝利や舞台での成功を目指して行う，実戦に近い稽古に相当すると言えよう．

そのためには，実際に編入学試験で出題された問題を用いるのが最も適していることは言うまでもない．一方で，編入学試験は目に見える一つの目標ではあるが，決してゴールではない．単なる目先の試験だけではなく，一生使っていける数学の深い知識が身につくようになることが，一貫して本ライブラリ監修者の願いであり，また編著者・執筆者一同の目指したところである．

上述の意図に沿って，執筆陣は多くの大学編入学試験問題を取り寄せて検討した上で，極端な難問は排する一方，編入学試験突破のために落とせない基本的な問題から数学的な考え方を身につけるのに適した良問までを精選し，それらを次のように分類して掲載した．

基本問題：主に編入試験過去問題から典型的で易しめの問題

類題：基本問題と同様の問題（入試でできてほしい問題）

演習問題：やや難しめの問題（入試で合否が分かれると思われる問題）

また，都城工業高等専門学校の学生野口 器氏，廣池 敬太氏に解答などを丁寧にチェックしていただいた．記して感謝する．

実践的な知識・技能を身につけ，さらに高度な学芸を極めんと望む高い志を抱いた学生諸君には，各々が学びたい大学で学びたいことを学びたいだけ学んでほしいと願う．「未来を切り開く数学の力を身につける大きな手助けとなるように」との意図を本書が実現できているか否か，諸賢のご判断を俟ちたい．

2020 年春

監修者・編著者・執筆者

目　　次

1 ベクトルと行列

ベクトルの和・差　ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して，次が成り立つ．

(1)　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$　（交換法則）

(2)　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　（結合法則）

(3)　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$　（零ベクトルの性質）

(4)　$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$　（逆ベクトルの性質）

ベクトルの実数倍　ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$，実数 k, l に対して，次が成り立つ．

(1)　$(kl)\boldsymbol{a}=k(l\boldsymbol{a})$　（結合法則）

(2)　$(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a},\ k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$　（分配法則）

(3)　$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}, k\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0},\ 1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}, (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a},\ |k\boldsymbol{a}|=|k||\boldsymbol{a}|$　（スカラー倍の性質）

以下，空間ベクトルについてのみ記述するが，平面ベクトルについては，z 成分 a_3, b_3, c_3 などを除いて考えればよい．

ベクトルの成分表示による計算　$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$，実数 k に対して，次が成り立つ．

(1)　$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b} \Longleftrightarrow a_1=b_1, a_2=b_2, a_3=b_3$　　(2)　$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

(3)　$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_1\pm b_1, a_2\pm b_2, a_3\pm b_3)$（複号同順）　　(4)　$k\boldsymbol{a}=(ka_1, ka_2, ka_3)$

ベクトルの成分表示　2 点 $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2, b_3)$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3)$$

2 点間の距離　2 点 $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2, b_3)$ 間の距離は，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ と一致する．

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

内積と成分表示　$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$ に対して，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ（$0 \leqq \theta \leqq \pi$）としたとき，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$
特に，$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}, \boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ のとき，$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$

内積の性質　ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して，次が成り立つ．

(1)　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$　　(2)　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

(3)　$(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(k\boldsymbol{b})=k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$（$k$ は実数）

(4)　$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\pm\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\pm\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$（複号同順）

ベクトルの平行・垂直条件　$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}, \boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ であるとき，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} \text{ と } \boldsymbol{b} \text{ が平行} \iff \boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a} \text{ となる実数 } k \text{ が存在する} \\ \boldsymbol{a} \text{ と } \boldsymbol{b} \text{ が垂直} \iff \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0 \end{cases}$$

基本問題 1.1　内積となす角

2つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} u \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．ただし，u は正の実数とする．（首都大学東京）

(1)　内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ と大きさ $|\boldsymbol{a}|, |\boldsymbol{b}|$ をそれぞれ求めよ．

(2)　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ としたときの $\cos\theta$ を求めよ．

(3)　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するような実数 u の値を求めよ．

ポイント　内積の定義式より，$\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$ が得られる．また，ベクトルが直交するとき，内積が0になることから，実数 u を求めることができる．

【解答】 (1)　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 2u + (-1)\cdot 2 + 3\cdot 0 = 2u - 2$　答

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14} \quad \text{答}$$

$$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{u^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{u^2 + 4} \quad \text{答}$$

(2)　$\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \dfrac{2u-2}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{u^2+4}} = \dfrac{\sqrt{14}(u-1)}{7\sqrt{u^2+4}}$　答

(3)　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するとき，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$ なので，$2u - 2 = 0$ より，$u = 1$　答

類　題

1.1.1　2つのベクトル $\boldsymbol{a} = (2, -2, 1)$, $\boldsymbol{b} = (1, 1, 2)$ について，次の問いに答えよ．（首都大学東京）

(1)　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めよ．

(2)　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に垂直な単位ベクトルをすべて求めよ．

1.1.2　空間内の3点 $\mathrm{O}(0,0,0)$, $\mathrm{A}(1,2,3)$, $\mathrm{B}(-3,1,-2)$ について，次の問いに答えよ．（お茶の水女子大学）

(1)　$\angle\mathrm{AOB}$ の大きさ

(2)　$\triangle\mathrm{AOB}$ の面積

ヒント：(1) 2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角が，$\angle\mathrm{AOB}$ と等しいことから，その大きさを求めることができる．

演習問題

1.1 xyz 空間において，3点 $\mathrm{A}(1,3,1)$, $\mathrm{B}(2,4,3)$, $\mathrm{C}(3,-3,-1)$ を通る平面を α とするとき，次の問いに答えよ． (東京大学)

(1) 平面 α の方程式を求めよ．

(2) 点 $\mathrm{P}(1,1,1)$ からの距離が 5 であり，平面 α に平行な平面の方程式を求めよ．

(3) (2) で求めた平面に接し，点 P を中心とする球面を S とする．平面 α と球面 S が交わってできる円の中心座標と半径を求めよ．

1.2 点 $\mathrm{P}(x_0,y_0,z_0)$ を含む平面 α が，座標の原点 $\mathrm{O}(0,0,0)$ を中心とする半径 r の球面 β と接している． (九州大学)

(1) 点 P が球面 β 上にあるとき，平面 α を表す方程式を求めよ．

(2) 点 P が球面 β 上にないとき，平面 α に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$ が満たすべき条件を求めよ．

1.3 半径1の球面上の3点 A, B, C の間を球面に沿って長さが最短となるように結んだ曲線で作られる三角形 ABC とその内角 $\angle\mathrm{CAB}=\alpha, \angle\mathrm{ABC}=\beta, \angle\mathrm{BCA}=\gamma$ を考える．ただし，$0<\alpha \leqq \frac{\pi}{2}, 0<\beta \leqq \frac{\pi}{2}, 0<\gamma \leqq \frac{\pi}{2}$ である．球の中心を O とし，辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a,b,c とするとき，以下の問いに答えよ． (東北大学)

(1) 面 OAB に平行なベクトルを $\boldsymbol{n}_1=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とし，面 OAC に平行なベクトルを $\boldsymbol{n}_2=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする（ただし，s,t は実数）．$\boldsymbol{n}_1$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に垂直となる s を求め，そのときの $\boldsymbol{n}_1$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を使って表せ．また，$\boldsymbol{n}_2$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に垂直となる t を求め，そのときの $\boldsymbol{n}_2$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を使って表せ．

(2) $\cos\alpha$ を a,b,c を使って表せ．ただし，α は (1) で求めた $\boldsymbol{n}_1$ と $\boldsymbol{n}_2$ のなす角に等しい．

(3) $a=b=c=\frac{\pi}{2}$ のとき，球面上の三角形 ABC の内角の和 $\alpha+\beta+\gamma$ を求めよ．

1.4 3個の1次独立な実数ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ に対して，3次の正方行列 A の (i,j) 成分を $\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j$ で定義する．ここで $\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j$ は，ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ と $\boldsymbol{a}_j$ の内積を表すものとする．ただし，$\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_3=0$ であるとする．このとき，以下の問いに答えよ． (東京大学)

(1) 行列 A の行列式を求めよ．さらに，その値が正であることを示せ．

(2) 実数 x に対して，関数 $f(x)$ を，

$$f(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & x\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}1\\1\\x\end{pmatrix}$$

で定義する．$f(x)$ を定めよ．

類題・演習問題解答

第 1 章

1.1.1 (1)

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2-2+2=2,\\&|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3,\\&|\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}\end{aligned}$$

よって,

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\sqrt{6}}{9}$$

(2) 求める単位ベクトルを (p,q,r) $(p^2+q^2+r^2=1)$ とおくと,

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}\cdot(p,q,r)=2p-2q+r=0,\\&\boldsymbol{b}\cdot(p,q,r)=p+q+2r=0\end{aligned}$$

より, $(p,q,r)=\left(p,\frac{3}{5}p,-\frac{4}{5}p\right)$ となる. $p^2+\left(\frac{3}{5}p\right)^2+\left(-\frac{4}{5}p\right)^2=1$ より $p=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ なので, 単位ベクトルは

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{3}{5\sqrt{2}},\mp\frac{4}{5\sqrt{2}}\right)\quad\text{(複号同順)}$$

1.1.2 (1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-3+2-6=-7$$

また,

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=\sqrt{1+4+9}\cdot\sqrt{9+1+4}\cdot\cos(\angle\mathrm{AOB})\\&=14\cos(\angle\mathrm{AOB})\end{aligned}$$

よって, $\cos(\angle\mathrm{AOB})=\frac{-7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}}=\frac{-1}{2}$
$0\leqq\theta\leqq\pi$ なので $\angle\mathrm{AOB}=\frac{2}{3}\pi$

(2) $\triangle\mathrm{AOB}$ の面積は,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin(\angle\mathrm{AOB})\\&=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

1.2.1 (1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=25$ より, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6$

(2) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4+9-2\cdot6=1$. よって, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$

1.3.1 (1) $\dfrac{x-1}{2}=y-8=\dfrac{z-8}{3}$

(2) $\dfrac{x-1}{2}=y-8=\dfrac{0-8}{3}$ より, xy 平面 $z=0$ との交点は $\left(-\dfrac{13}{3},\dfrac{16}{3},-\dfrac{8}{3}\right)$

1.4.1 (1) 求める平面を $ax+by+cz+d=0$ とすると, 3 点 A, B, C を含むので,

$$\begin{cases}a+b+c+d=0\\2a+3b+2c+d=0\\-2a+3c+d=0\end{cases}$$

となる. よって, $b=d=-a$, $c=a$ なので, 求める平面は $x-y+z-1=0$

(2) 求める直線の方向ベクトルは, (1) で求めた平面の法線ベクトルと平行なので, 直線の方程式は

$$(x,y,z)=(0,2,5)+k(1,-1,1)\quad(k\text{ は実数})$$

よって, $x=-y+2=z-5$

(3) 点と平面との距離の公式より,

$$\frac{|0-2+5-1|}{\sqrt{1+(-1)^2+1}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

1.5.1 (1) S の直径は $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=6$ となる. また, 中心の座標は 2 点 A, B の中点と一致するので, $\left(\frac{5+1}{2},\frac{3-1}{2},\frac{4+2}{2}\right)=(3,1,3)$. よって, S の方程式は

$$(x-3)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=36$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1-5,-1-3,2-4)=(-4,-4,-2)$ を法線ベクトルとし, 点 $(3,1,3)$ を通る平面を求めればよいので,

$$-4(x-3)-4(y-1)-2(z-3)=0$$

より,

$$2x+2y+z-11=0$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-4,-4,-2)$ を方向ベクトルとし, 点 C を通る直線を求めればよいので, l の方程式は

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y+3}{2}=z-1$$

(4)

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y+3}{2}=z-1=n$$

とおくと $x=2n-1$, $y=2n-3$, $z=n+1$. これらを $(x-3)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=36$ に代入すると $n=0,4$ が得られる. よって, 求める交点は $(-1,-3,-1)$, $(7,5,5)$

1.5.2 (1) S は原点を中心とする半径 1 の球なので, $x^2+y^2+z^2=1$. L を $ax+by+cz+d=0$ とすると, 3 点 A, B, C を含むので,