まえがき

本書でのグラフとは，幾つかの点を線で結んでできる図形のことであり，空間グラフとは，それを主に 3 次元 Euclid 空間の中で実現したものである．空間グラフの理論とは通常，その 3 次元空間における空間グラフの位置の問題を研究する学問のことを指す．一般に，ある空間の中の図形の位置の問題の研究はトポロジー (位相幾何学) の一分野として知られるところである．特に空間グラフが自己交差を持たない (幾つかの) 閉じた曲線状の図形である場合は結び目 (絡み目) と呼ばれ，それらを研究する学問は結び目理論として今日，低次元トポロジーと呼ばれる分野の中核をなしている．このことから，空間グラフの理論も，結び目理論を包含する理論として低次元トポロジーの立場から研究されることが多い．然るべき用語を用いれば，3 次元空間内に埋め込まれた 1 次元閉多様体の位置の問題を研究するのが結び目理論で，一方，多様体とは限らない 1 次元の多面体の位置の問題を研究するのが空間グラフの理論ということになろう．より平たく言えば，空間グラフの理論とは，3 次元空間内の幾つかの点を伸縮自在の紐で繋いでできる図形について，その結ばり具合や絡まり具合を研究する分野である．従って結び目や絡み目の諸性質の空間グラフへの一般化を自然な問題意識として常に持つ一方，結び目理論の拡張に留まらない空間グラフ独特の現象が多々生じるからこそ，それらを動機として独自の研究課題を有し，更には化学における分子トポロジーへの応用上の理論的支柱の役割も持ちながら発展を続けてきた分野でもある．

空間グラフの研究の主軸は，位置の問題という意味では空間グラフの外在的な性質の研究であり，結び目理論がそうであるように，代数的トポロジーに立脚した素朴なものから，外部空間が 3 次元多様体として許容する構造に立脚したもの，種々の代数系やその表現に立脚したものなど，多種多様な手法で研究が行なわれている．結び目理論においては，特に自明な結び目・絡み目と呼ばれる標準的な位置にある結び目・絡み目の存在から，紐の結ばりや絡まりが‘ほどける’，‘ほどけない’という身近で親しみある現象が数学的に適切に定義され研究されるのだが，一方で空間グラフの理論においては，空間に埋め込むグラフが十分大きければ，それが空間内のどのような位置にあっても，必ずどこかにほどけない箇所が生じることがあることが 1980 年代初めに認識された．即ち，空間グラフの‘絡まり具合’や‘結ばり具合’がグラフ固有の不可避な性質として備わっていることがあり，それを空間内の位置に依らないグラフ生来の性質から特徴付けようという研究が盛んに行なわれるようになった．これらはいわば空間グラフの内在的な性質の研究であり，その嚆矢となったのが，有名な Conway–Gordon の定理である．Conway–Gordon の定理は，3 次元空間内のどの位置にあっても，必ずほどけない絡み目や結び目が生じるグラフが存在することを明らかにしたのだが，そこで用いられた，空間グラフ内の結び目と絡み目の振る舞いが不変量のレベルで互いに独立ではないことを見出すアイディアは，分類理論に代表される空間グラフの大域的性質，及びグラフ並びに空間グラフの対称性に代表される局所的性質との双方と深く結び付いて空間グラフの

理論全域に渡って大きな影響を及ぼすこととなった．今日，Conway–Gordon の定理は様々な側面から著しく一般化され，空間グラフの内在的性質の研究は，トポロジー，物理，化学，実験科学などを巻き込んで多くの分流を生み，1 つの体系を成しつつある．

前置きが長くなってしまったが，本書の目的は，上で述べたような Conway–Gordon の定理を巡る空間グラフの内在的性質の研究の拡がりと深化について，特に同定理の様々な側面とその拡張に焦点をあてて解説を行なうことである．まず第 1 章で空間グラフの数学的取り扱いと基本的な研究方法について準備したあと，第 2 章では空間グラフの Alexander 不変量について解説する．これは結び目や空間グラフの古典的な不変量であるが，空間グラフの研究の動機付けとなる現象を捉えてくれるとともに，内在的性質の研究において欠かせない結び目の不変量が根ざすものでもあり，また近年大きく発展しているハンドル体結び目の理論への入口でもあるので，ここで述べておくことにした．第 3 章では，Conway–Gordon の定理，及びその証明のアイディアから派生した空間グラフの不変量とその性質について述べる．Conway–Gordon の定理が空間グラフの大域的性質と豊かな結び付きを持つ様子を見ることができるだろう．第 4 章では，Conway–Gordon の定理によりその存在が明らかとなった 2 つの性質，絡み目内在性と結び目内在性について，これら性質を有するグラフの特徴付けの研究の現況を紹介する．ここではグラフ理論による組合せ構造の解析の手法が活躍する．第 5 章では結び目・絡み目内在性を一般化して得られる種々の内在的性質を紹介する．特にここでは内在的性質全体の集合を俯瞰的に捉えることに力点が置かれ，結び目内在性の新たな解釈や，第 2 章で触れる空間グラフ独特の結ばり方との意外な関係が明らかになるであろう．第 6 章では，空間グラフ内の結び目・絡み目を代数的不変量で縛るという立場からの，Conway–Gordon の定理の精密化と一般化の理論について述べる．特にもともと mod 2 の合同式で述べられていた Conway–Gordon の定理が整数上に持ち上げられ，様々なグラフに拡張されて行く様子は，本書の中でもっともダイナミックな場面である．第 7 章では，分子トポロジーと呼ばれる，トポロジーの高分子化学への応用理論について触れる．特にキラリティと呼ばれる分子の対称性や，高分子の構造に由来する線形空間グラフへの応用がここで見られるであろう．

読者諸氏は，本書において特に第 3 章以降で述べる空間グラフの諸性質のほとんどが，何らかの形で Conway–Gordon の定理の一般化あるいは拡張となっていることに気付くことと思う．実際，現代の空間グラフの研究は，その多くが Conway–Gordon の定理をルーツとしているのである．勿論，本書においてその全てを網羅することは到底できず，更には筆者の趣味が相当に反映されており，その内容はかなり偏りがあることを予め断っておかねばならない．説明はできるだけ自己充足的となるよう努めたが，基本群やホモロジー群といった古典的な代数トポロジーの基本的事項は前提とせざるを得なかったし，結び目理論においてよく用いられる議論を何気なく使っている箇所もあるので，空間グラフの理論の初学者にとっては甚だ配慮不足であることは否めない．また，幾つかの定理については証明を省略している．その一方で，空間グラフの理論の各論への入口となっている事項を随所に散りばめておいたし，また空間グラフの研究において頻繁に使われるテクニックも随所に盛り込んであるので，研究の雰囲気だけでもある程度感じて貰えれば，筆者としては嬉しいところである．各章末に記載の演習問題には解答は一切付けていないが，時間をかけないと解けないような難問はほとんどない (はず) なので，本書を読み進めるにあたってのペースメーカーだと思って取り組んで貰えればよい．

空間グラフの理論を専門的に解説した和書は，1995 年に出版された [68] が長らく唯一のものであり，筆者はその本で空間グラフの理論に出会った．先駆的な書物を著わされた小林一章氏に敬意を表したい．また本書を執筆するにあたって，草稿に目を通して頂き，そして有益なコメントを頂いた鈴木正明氏，谷山公規氏，安原晃氏に謝意を表したい．

最後に，本書の出版に際しお世話になったサイエンス社の平勢耕介氏，そして筆者の怠慢にも関わらず，辛抱強く原稿をお待ちいただいた同じくサイエンス社の大溝良平氏に感謝申し上げます．大変ありがとうございました．

2022 年 5 月

新國 亮

目　次