SGC ライブラリ-104

弦理論と行列模型

弦理論の非摂動的定式化と新しい時空と物質の捉え方

土屋 麻人　著

サイエンス社

まえがき

本書は弦理論の非摂動的定式化としての行列模型について解説したものである．弦理論は重力を含む統一理論の最有力候補であり，活発な研究が進められている．元々ハドロンを記述する目的で産声を上げた弦理論は，1980 年代半ばからの第 1 次革命期に続き，1990 年代半ばからの D ブレーンを軸にした第 2 次革命期を経て，急速な発展を遂げたが，まだその全貌は明らかになっていない．特に，摂動論でしか弦理論は定式化されておらず，今後は非摂動的な弦理論の定義を与えることがひとつの大きな課題であると考えられる．行列模型はこのような弦理論の非摂動的定式化の有力な候補である．非臨界次元の弦理論については行列模型は成功を収め，現実的な超弦理論についてもいくつかの行列模型が非摂動的定式化として提案されている．

これらの提案や最近のゲージ重力対応の進展においては,「出現する（創発する）時空 (emergent space-time，emergent geometry)」の概念が鍵になっていると思われる．すなわち，理論の定義においては，存在しない時空が，ダイナミカルに行列やゲージ場の自由度から生成されるということである．そこで，本書においては，今後の弦理論の非摂動的定式化の発展のヒントになることを願って，行列模型における様々な時空の出現の仕方に焦点を当てて話を進めていく．

本書を読むにあたっては，場の量子論の基礎的知識は仮定されている．弦理論の知識はあったほうが望ましいが，なくても読み進めることができると期待している．本書の構成を以下に簡単に述べる．第 1 章では，弦理論の非摂動効果が一般的にどういうものかを場の量子論の非摂動効果と比較しながら見る．同時に，弦理論の非摂動的定式化の必要性を論じる．第 2 章では，弦理論の雛型である非臨界次元の弦理論とそれを非摂動的に定義する行列模型を解説する．ここで，行列模型が弦理論の非摂動的定式化として有望であることを実感していただければと思う．ここでは，行列模型のファインマンダイアグラムが 2 次元面のランダム単体分割に対応し，そこから弦の世界面が出現すると同時に，行列の固有値の空間から弦の標的空間が出現するという 2 つの意味での時空の出現が見られる．また，プラナー極限やループ方程式など後の章に引き継がれる概念がここで登場する．第 3 章では，行列模型における時空の出現の最初の例と言えるラージ N 還元を解説する．時空の出現の仕方を強調したが，ラージ N ゲージ理論の非摂動的定式化という側面にも触れる．第 4 章はラージ N 還元と類似した，行列模型における T 双対について解説する．応用として，オービフォルディングによる超対称ゲージ理論の格子理論の構築にも触れる．第 5 章は非可換幾何と行列模型の関係について解説する．これは，通常のラージ N 還元とは異なった時空の出現の仕方である．時空の非可換性は量子重力や弦理論において本質的であると考えられるため，それが行列模型とどのように関係するかを見るのは有意義であろう．以上の章を受ける形で第 6 章では，超弦理論の非摂動的定式化の候補として提案された行列模型を解説する．参考文献は本書を読み進める上で助けになると考えられるものにとどめたことをご容赦願いたい．

本書がこれから弦理論の非摂動的定式化を発展させようとする方々の一助となれば幸いである．

米谷民明氏，川合光氏，糸山浩司氏，北澤良久氏，石橋延幸氏，浜田賢二氏，磯暁氏，多田司氏，福間将文氏，青木一氏，西村淳氏をはじめとする多くの先生方，先輩方，同僚の方々，学生諸君との長年の共同研究や議論が，本書の成立にとって欠かせないものになっています．この場を借りて，厚く御礼申し上げます．また，本書の執筆を勧めてくださり，執筆の際にも大変お世話になったサイエンス社の平勢耕介氏に感謝いたします．

2014 年 1 月

土屋麻人

目　次

第 1 章
弦理論の非摂動効果

弦理論は重力を含む統一理論の最有力候補である．本章では，弦理論において，その非摂動的定式化である行列模型が登場した背景について述べる．まず，弦理論の非摂動効果がどのようなものかを見た後に，弦理論の非摂動的定式化の必要性について述べる．

1.1 弦理論の非摂動効果

弦理論の非摂動効果を見る前に，場の量子論における非摂動効果がどのようなものかを思い出そう．具体的に，4 次元のゲージ理論を考え，その結合定数を g とする．摂動展開による自由エネルギー F の計算は，図 1.1 のファインマンダイアグラムを足し上げることに相当する．

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} C_n g^{2n}. \tag{1.1}$$

ここで $C_n g^{2n}$ は $n+1$ ループの連結ダイアグラムの総和を表す．$n+1$ ループの連結ダイアグラムの個数は n が大きいとき，$n!$ で増えていくことが知られている．したがって，C_n は n が大きいとき，

$$C_n \sim n! C^{-n} \tag{1.2}$$

のように振舞うことが期待される．ここで，C はある定数である．これから，摂動級数 (1.1) は収束せず，漸近級数であることがわかる．

例として，(1.2) の振舞いを ϕ^4 理論の場合に見てみよう．次の 0 次元の理論の摂動展開を考える．

$$I(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{g^2 x^4}{4!}\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} I_n g^{2n}. \tag{1.3}$$

ここで，I_n は対称性因子も含めて分配関数への $n+1$ ループの寄与に対応する

第 2 章 非臨界次元の弦理論と行列模型

本章では，前章で見た弦理論の非摂動効果を取り入れて，行列模型が弦理論を非摂動的に定義しうることを理解する．例として，弦理論としては雛型であるが，対応する行列模型が正確に解ける非臨界次元の弦理論を扱う．

2.1 リューヴィル理論

この節では，行列模型に入る前に，**非臨界次元の弦理論**を記述する連続理論である**リューヴィル理論**を解説する．ここでは，簡単のためボゾニックな理論を扱う．

2 次元の閉じた向き付け可能な多様体を考え，この多様体上に計量場 $g_{ab}(x)$ と中心電荷が D であるスケール不変な D 個のスカラーの物質場を導入する（図 2.1）．ここで，$x = (x^1, x^2)$ は 2 次元多様体の座標であり，$a, b = 1, 2$ である．この多様体を弦の世界面とみなすと，この物質場は弦の世界面から**標的空間**への写像とみなせる．そして，多様体の面積を A に固定した分配和を以下のように定義する．

$$Z(A) = \int \frac{\mathcal{D}g}{\mathrm{vol(Diff)}}\, Z_M[g]\, \delta\left(\int d^2x\sqrt{g} - A\right). \tag{2.1}$$

ここで，多様体のトポロジーは固定されている．今，それはオイラー数 χ を与えれば決まる．第 1 章で述べたように，多様体のハンドルの数（ジーナスの数）を h とすると，$\chi = 2 - 2h$ の関係がある．$Z_M[g]$ は計量場 $g_{ab}(x)$ を固定したときの物質場の分配和で，具体的には

$$Z_M[g] = \int \mathcal{D}X e^{-\frac{1}{8\pi}\int d^2x\sqrt{g}g^{ab}\partial_a X^i \partial_b X^i} \tag{2.2}$$

で定義される．$X^i(x)$ $(i = 1, \cdots D)$ は D 個の物質場で，D 次元の標的空間への世界面の写像を表す．この時点で D は整数だが，後に $D \leq 1$ の場合を特に考える．D が整数でないときは中心電荷 D の共形場を結合させることによっ

第 3 章
ラージ N 還元

本章では，ラージ N ゲージ理論はそれを次元還元して得られる行列模型で記述されるというラージ $\boldsymbol{N}$ **還元 (large-N reduction)** [24]~[28] について解説する *1)．次元還元した分の時空が行列の自由度から復活し，出現することを見る．これは行列模型における時空の出現の初めての例と言える．

3.1 行列場の理論のラージ N 還元

ゲージ理論を考える前に，以下のような R^d 上の ϕ^3 行列場理論を考える．ゲージ理論への移行は平易に行える．

$$S = \int d^d x \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi(x))^2 + \frac{m^2}{2}\phi(x)^2 + \frac{\kappa}{3}\phi(x)^3\right). \tag{3.1}$$

ここで，$\phi(x)$ は $N \times N$ のエルミート行列の d 次元スカラー場である．この理論のラージ $\boldsymbol{N}$ **還元模型**を得るために以下の規則を適用する．

$$\begin{aligned}
&\phi(x) \to e^{iP_\mu x^\mu} \phi e^{-iP_\mu x^\mu}, \\
&\int d^d x \to \left(\frac{2\pi}{\Lambda}\right)^d.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

(3.2) において，ϕ は空間に依存しない $N \times N$ のエルミート行列で，P_μ ($\mu = 1, \cdots, d$) は以下のような d 個の対角行列である．

$$P_\mu = \begin{pmatrix} p_\mu^{(1)} & & & \\ & p_\mu^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_\mu^{(N)} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

ここで，$p_\mu^{(i)}$ ($i = 1, \cdots, N$) は 1 辺の長さ Λ の d 次元立方体の中に一様に分

*1) ラージ $\boldsymbol{N}$ 等価性 (large-N equivalence) とも言う．

第 4 章

行列模型における T 双対

この章では「行列模型における **T 双対**」あるいは「行列模型における**コンパクト化**」あるいは「行列模型における**オービフォルディング**」と呼ばれるものについて解説する．高次元から次元還元して得られた低次元のゲージ理論から元の高次元のゲージ理論を得る手続きであるが，行列から空間が出現していると見ることができる．前章で見たラージ N 還元とは異なり，得られる高次元のゲージ理論は有限の N も可能である．ただし，オービフォルド条件と呼ばれる条件を行列の配位に手で課さなければならず，ラージ N 還元の場合のように「自然に」高次元の理論が得られるわけではない．超弦理論の文脈では，D ブレーンの低エネルギー有効理論の T 双対のもとでの振舞いと見ることができる．4.1 節では，これに則して解説する．4.2 節では，行列模型におけるオービフォルディングの重要な応用である格子上の超対称ゲージ理論の構築について述べる．

4.1　D ブレーン有効作用と T 双対

まず，超弦理論における T 双対について復習しておこう．ここでは，IIA 型および IIB 型超弦理論を念頭において話を進める．$X^M(\tau,\sigma) \quad (M=0,1,\cdots,9)$ を弦の世界面の標的空間への埋め込みを表す写像とする．ここで，τ，σ は世界面のそれぞれ時間的，空間的座標である．今，q 方向（q は 1 から 9 のうちのどれか）は半径 R の S^1 にコンパクト化されているとする．すなわち，

$$X^q(\tau,\sigma) \sim X^q(\tau,\sigma) + 2\pi R \tag{4.1}$$

であるとする．T 双対とは

$$\partial_\tau X^q \leftrightarrow \partial_\sigma X^q, \tag{4.2}$$

$$R \leftrightarrow \tilde{R} = \frac{1}{2\pi R} \tag{4.3}$$

第 5 章
非可換幾何と行列模型

この章では，**非可換幾何**と行列模型の繋がりについて考察する [*1)]．例として，**非可換平面**と**非可換球面**という非可換空間を取り上げ，それらの上の場の理論がどのようにして行列模型の中で実現されるかを見る．これは，行列模型における時空の出現の仕方の一つと見ることができる．第 2 章での非臨界次元の弦理論を表す行列模型における出現の仕方は「行列＝座標」であったと言え，第 6 章の超弦理論の行列模型においても同様である．一方，第 3 章でのラージ N 還元と第 4 章での行列模型の T 双対における出現の仕方は「行列＝運動量」であったと言える．これに対して，この章での出現の仕方は言わばこの中間である，すなわち行列は座標とも思えるし，運動量とも思える，ということがわかるであろう．

5.1　非可換平面

この節では，最も簡単は非可換空間である非可換平面を考える．まず，2 次元から始める．偶数高次元への拡張は容易である．

2 次元非可換平面では，その座標を $\hat{x}_1$ と $\hat{x}_2$ とすると，それらが交換しない．

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = i\theta. \tag{5.1}$$

ここで，θ は実の定数である．$\theta \to 0$ が可換極限に相当する．$\hat{x}_1$ と $\hat{x}_2$ に付けた $\hat{}$ は，これらが普通の数（c 数）ではなく，演算子（無限次元の行列）であることを示している．ここで，共役の運動量を次式で定義する．

$$\hat{p}_1 = \theta^{-1}\hat{x}_2, \quad \hat{p}_2 = -\theta^{-1}\hat{x}_1. \tag{5.2}$$

この定義と (5.1) から，以下が満たされることがわかる．

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2). \tag{5.3}$$

*1)　非可換幾何と弦理論の様々な関係については [52] とその中の参考文献を参照されたい．

第 6 章
超弦理論と行列模型

この章では，超弦理論の非摂動的定式化の候補として提唱されたIIB 行列模型[6] について解説する．6.1 節で模型を導入する．6.2 節から 6.5 節で，この模型が超弦理論の非摂動的定式化になっていることの証拠として，IIB 型超重力理論と IIB 型超弦理論との対応を見る．6.6 節では曲った時空の記述に対する試みについて述べる．6.7 節では，この模型のユークリッド版のダイナミクスの研究を紹介する．6.8 節で最近の研究成果を紹介する．

6.1 IIB 行列模型

IIB 行列模型 *1) の作用は以下で与えられる．

$$S=-\frac{1}{g^2}\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{4}[A_\mu,A_\nu][A^\mu,A^\nu]+\frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^\mu[A_\mu,\psi]\right). \tag{6.1}$$

ここで，A_μ $(\mu=0,1,\cdots,9)$ は 10 個の $N\times N$ のエルミート行列であり，μ は 10 次元のベクトルの足である．Γ^μ は 10 次元のガンマ行列で，ψ は 10 次元のマヨラナワイルスピノールの足を持ち，16 個の $N\times N$ のエルミート行列である．ψ はグラスマン奇である．A_μ がベクトル，ψ が 10 次元のマヨラナワイルスピノールとして変換すれば，この模型は 10 次元のローレンツ対称性を持つ．Tr は $N\times N$ 行列についてのトレースである．この模型は 10 次元の $U(N)$ 超対称ヤン・ミルズ理論を 0 次元に次元還元した形をしており，時空はアプリオリには存在していない．後で議論するように，時空はダイナミカルに生成する．

ローレンツ対称性に加えて，この模型は次の変換のもとでの不変性を持つ．

$$\begin{aligned}\delta^{(1)}A_\mu&=i\bar{\epsilon}_1\Gamma_\mu\psi,\\ \delta^{(1)}\psi&=\frac{i}{2}\Gamma^{\mu\nu}[A_\mu,A_\nu]\epsilon_1,\end{aligned} \tag{6.2}$$

*1） 提唱者（石橋，川合，北澤，土屋）の頭文字をとって IKKT 模型とも呼ばれる．

付録 A
リューヴィル作用の導出

この付録ではリューヴィル作用を導出する．

まず，**藤川の方法**に従って，**熱核 (heat kernel)** を用いて導出する[107],[108]．$\mathcal{M}$ を 2 次元多様体とし，$\mathcal{M}$ 上の計量場を $g_{ab}(x)$ $(a, b = 1, 2)$ とする．$\mathcal{M}$ 上の質量なしの自由スカラー場を考える．作用は，

$$S = \int d^2x \sqrt{g} \frac{1}{2} g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi \tag{A.1}$$

である．この作用は**ワイル変換**

$$g_{ab}(x) \to e^{\rho(x)} g_{ab}(x), \tag{A.2}$$

$$\phi(x) \to \phi(x) \tag{A.3}$$

のもとで不変である．分配関数

$$Z[g] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S} \tag{A.4}$$

において，経路積分の測度 $\mathcal{D}\phi$ はノルム

$$||\delta\phi||^2 = \int d^2x \sqrt{g} \delta\phi(x) \delta\phi(x) \tag{A.5}$$

より定義されている．ワイル変換 (A.3) のもとで，(A.5) は不変でないため，これより定義される積分測度 $\mathcal{D}X$ は不変でない．つまり，ワイル対称性に対する**量子異常**（アノマリー）がある．(A.4) は

$$\begin{aligned} Z[g] \sim (\det{}' \Delta_g)^{-\frac{1}{2}} &= \exp\left[-\frac{1}{2} \mathrm{Tr} \ln \Delta_g\right] \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{g} \langle x | \ln \Delta_g | x \rangle\right] \end{aligned} \tag{A.6}$$

と書ける．ここで，$\sim$ はコンフォーマルモードに依存した部分のみ見ているという意味で，$\det{}'$ はゼロモードを除いた行列式を表す．また，ラプラシアン Δ_g は

付録 B

Van der Monde行列式

ここでは，(2.48) を導出する．まず，M はエルミート行列だから，ユニタリー行列 U を用いて $M = U^\dagger \Lambda U$ のように対角化できる．ここで，$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1 \ldots \lambda_N)$ である．M の $U(N)$ 不変な積分測度はノルム $||dM||^2 = \mathrm{tr}(dM)^2$ によって定義されていた．このノルムは以下のように書きかえられる．

$$\begin{aligned}
||dM||^2 &= \mathrm{tr}(dM)^2 \\
&= \mathrm{tr}(dU^\dagger \Lambda U + U^\dagger d\Lambda U + U^\dagger \Lambda dU)^2 \\
&= \mathrm{tr}(dU^\dagger \Lambda U dU^\dagger \Lambda U + U^\dagger d\Lambda U U^\dagger d\Lambda U + U^\dagger \Lambda dU U^\dagger \Lambda dU \\
&\quad + 2dU^\dagger \Lambda U U^\dagger d\Lambda U + 2U^\dagger U dU^\dagger \Lambda U U^\dagger \Lambda dU + 2U^\dagger d\Lambda U U^\dagger \Lambda dU).
\end{aligned} \tag{B.1}$$

ここで $d\Omega = dUU^\dagger$ とすると，$UU^\dagger = \mathbf{1}$ の変分をとることにより得られる関係式 $dUU^\dagger + UdU^\dagger$ を使って，$d\Omega^\dagger = UdU^\dagger = -dUU^\dagger = -d\Omega$ となる．すなわち，$d\Omega$ は反エルミートになる．これを用いると，(B.1) は

$$\begin{aligned}
||dM||^2 &= \mathrm{tr}(d\Omega^\dagger \Lambda d\Omega^\dagger \Lambda + d\Lambda^2 + \Lambda d\Omega \Lambda d\Omega \\
&\quad + 2d\Omega^\dagger \Lambda d\Lambda + 2d\Omega^\dagger \Lambda^2 d\Omega + 2d\Lambda \Lambda d\Omega) \\
&= \mathrm{tr}(d\Lambda^2 - 2d\Omega \Lambda d\Omega^\dagger \Lambda + 2\Lambda^2 d\Omega d\Omega^\dagger)
\end{aligned} \tag{B.2}$$

となる．ここで，Λ は対角行列なので $d\Lambda\Lambda = \Lambda d\Lambda$ とできることを用いた．以下では，(B.2) を成分で書きなおしていく．

$$\begin{aligned}
||dM||^2 &= \sum_i d\lambda_i^2 + 2\sum_{i,j,k,l} (-d\Omega_{ij}\Lambda_{jk} d\Omega^\dagger_{kl}\Lambda_{li} + \Lambda_{ij}\Lambda_{jk} d\Omega_{kl} d\Omega^\dagger_{li}) \\
&= \sum_i d\lambda_i^2 + 2\sum_{i,j}(-d\Omega_{ij} d\Omega^\dagger_{ji}\lambda_i\lambda_j + \lambda_i^2 d\Omega_{ij} d\Omega^\dagger_{ji}) \\
&= \sum_i d\lambda_i^2 + \sum_{i,j}(\lambda_i^2 + \lambda_i^2 - 2\lambda_i\lambda_j) d\Omega_{ij} d\Omega^\dagger_{ji}.
\end{aligned} \tag{B.3}$$

付録 C

Green-Schwarz作用の超対称性と$\boldsymbol{\kappa}$対称性

この付録では，Green-Schwarz 作用の 10 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称性 (6.12) と κ 対称性 (6.13) を示す．

(6.9) の Green-Schwarz 作用を 2 つに分けておく．

$$S_{GS} = S_1 + S_2, \tag{C.1}$$

$$S_1 = -T\int d^2\sigma\sqrt{-\frac{1}{2}\Sigma^2}, \tag{C.2}$$

$$\begin{aligned} S_2 = -T\int d^2 \big(& i\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu(\bar\theta^1\Gamma_\mu\partial_b\theta^1 + \bar\theta^2\Gamma_\mu\partial_b\theta^2) \\ &+\epsilon^{ab}\bar\theta^1\Gamma\ \mu\partial_a\theta^1\bar\theta^2\Gamma_\mu\partial_b\theta^2\big)\,. \end{aligned} \tag{C.3}$$

ここで，

$$\Sigma^{\mu\nu} = \epsilon^{ab}\Pi_a^\mu\Pi_b^\nu, \tag{C.4}$$

$$\Pi_a^\mu = \partial_a X^\mu - i\bar\theta^1\Gamma^\mu\partial_a\theta^1 + i\bar\theta^2\Gamma^\mu\partial_a\theta^2 \tag{C.5}$$

であった．

まず，10 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称性から示す．(6.12) のもとで，明らかに Π_a^μ は不変，よって，S_1 は不変である．S_2 の変分は

$$\begin{aligned} \delta S_2 = -T\int d^2\sigma\,\big(& i\epsilon^{ab}\partial_a(i\bar\epsilon^1\Gamma^\mu\theta^1 - i\bar\epsilon^2\Gamma^\mu\theta^2)(\bar\theta^1\Gamma_\mu\partial_b\theta^1 + \bar\theta^2\Gamma_\mu\partial_b\theta^2) \\ &+ i\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu(\bar\epsilon^1\Gamma_\mu\partial_b\theta^1 + \bar\epsilon^2\Gamma_\mu\partial_b\theta^2) \\ &+\epsilon^{ab}\bar\epsilon^1\Gamma^\mu\partial_a\theta^1\bar\theta^2\Gamma_\mu\partial_b\theta^2 + \epsilon^{ab}\bar\theta^1\Gamma^\mu\partial_a\theta^1\bar\epsilon^2\Gamma_\mu\partial_b\theta^2\big)\,. \end{aligned} \tag{C.6}$$

ここで，右辺の 2 行目は全微分項なので消える．結局，

$$\delta S_2 = -T\int d^2\sigma\,\big(-\epsilon^{ab}\bar\epsilon^1\Gamma^\mu\partial_a\theta^1\bar\theta^1\Gamma_\mu\partial_b\theta^1 + \epsilon^{ab}\bar\epsilon^2\Gamma^\mu\partial_a\theta^2\bar\theta^2\Gamma_\mu\partial_b\theta^2\big) \tag{C.7}$$

付録 D

南部・後藤弦とSchild弦の対応

この付録では，第6章で見た南部・後藤弦とSchild弦の対応をさらに詳しく見てみよう [69]．簡単のために，フェルミオンは落として考えるが，フェルミオンを入れても議論は同様に進む．

世界面の座標を $\sigma^a \quad (a=1,2)$ とし，

$$\tilde{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu. \tag{D.1}$$

ここで，$\sqrt{g}$ は世界面上のスカラー密度で，$\tilde{\sigma}^{\mu\nu}$ は第6章の $\sigma^{\mu\nu}$ と異なり，世界面上の一般座標変換のもとで共変になっていることに注意したい．$\sqrt{g}$ として，具体的には世界面上の計量場 g_{ab} を用いて，$\sqrt{g} = \sqrt{\det(g_{ab})}$ とすればよい．

$\tilde{\sigma}^{\mu\nu}$ を使って，南部・後藤作用は

$$S_{NG} = -T\int d^2\sigma\sqrt{g}\sqrt{-\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2} \tag{D.2}$$

と表される．$\sqrt{g}$ はこの中ではキャンセルしており，第6章で考えた南部・後藤作用のボゾニック部分に確かに等しい．

一方，**Schild** 作用

$$S_S = \int d^2\sigma\sqrt{g}\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2 \tag{D.3}$$

を定義する．この作用は第6章のSchild型作用に比べて，$\sqrt{g}$ に比例する項がなく，$\sqrt{g}$ は変数ではなく固定されていると考える．ここでは，第6章の $\sqrt{g}$ の方程式が自動的に X^μ の方程式を使うと満たされることを見る．これは，(D.3) の運動方程式が (D.2) の運動方程式に等価であることを意味する．実際，(D.2) の運動方程式は

$$\partial_a\left(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{-\tilde{\sigma}^2}}\frac{\partial\tilde{\sigma}^2}{\partial\partial_a X^\mu}\right) = 0 \tag{D.4}$$

であり，(D.3) の運動方程式は

付録 E

1ループ有効作用の計算

この付録では，IIB 行列模型における 1 ループ有効作用を求める．

場の量子論における背景場の方法の場合と同じように，行列 A_μ と ψ を背景と量子ゆらぎに分ける．

$$A_\mu = p_\mu + \tilde{a}_\mu, \tag{E.1}$$

$$\psi = \chi + \tilde{\varphi}. \tag{E.2}$$

ここで，p_μ と χ が背景で，$\tilde{a}_\mu$ と $\tilde{\varphi}$ が量子ゆらぎである．作用 (6.1) を量子ゆらぎの 2 次まで展開する．

$$\begin{aligned} S_2 = -\frac{1}{g^2}\mathrm{Tr}\Bigg(&\frac{1}{4}[p_\mu, p_\nu]^2 + \frac{1}{2}\bar{\chi}\Gamma^\mu[p_\mu, \chi] \\ &- \tilde{a}_\nu\left([p_\mu,[p_\mu,p_\nu]] + \frac{1}{2}[\bar{\chi}\Gamma^\nu, \chi]\right) + \bar{\chi}\Gamma^\mu[p_\mu, \tilde{\varphi}] \\ &+ \frac{1}{2}[p_\mu, \tilde{a}_\nu]^2 - \frac{1}{2}[p_\mu, \tilde{a}_\mu]^2 + [p_\mu, p_\nu][\tilde{a}_\mu, \tilde{a}_\nu] \\ &+\frac{1}{2}\bar{\tilde{\varphi}}\Gamma^\mu[p_\mu, \tilde{\varphi}] + \bar{\chi}\Gamma^\mu[\tilde{a}_\mu, \tilde{\varphi}]\Bigg). \end{aligned} \tag{E.3}$$

(E.3) の右辺の 2 行目は量子ゆらぎの 1 次の項で，運動方程式より消えるか，または背景場の方法では落とす．ゲージ対称性

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= i[A_\mu, \alpha], \\ \delta\psi &= i[\psi, \alpha] \end{aligned} \tag{E.4}$$

を固定するために，次のゲージ固定項と Fadeev-Popov ゴースト項を加える．

$$S_{g.f.} = -\frac{1}{g^2}\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}[p_\mu, \tilde{a}_\mu]^2 + [p_\mu, b][p_\mu, c]\right). \tag{E.5}$$

ここで，c はゴーストであり，b は反ゴーストである．

以下では，$\chi = 0$ とおく．量子ゆらぎの 1 次の項を落として，

付録 F
ユークリッド型模型の有限性

この付録では，ユークリッド模型の有限性を示す[84], [85]．

以下の議論においては，(6.1) で $4g^2 = 1$ と一般性を失わずにおける．まず，フェルミオンを落としたボゾニック模型を考える．分配関数は

$$Z_{d,G} = \int \prod_{\lambda=1}^{d} dA_\lambda \exp\left(\mathrm{Tr}([A_\mu, A_\nu]^2\right) \tag{F.1}$$

と書ける．ここで，A_μ はコンパクトリー群 G のリー代数 $\mathcal{G}$ に属している．後で，$G = SU(N)$ とするが，初めは一般の G で議論する．

(F.1) の積分において，A_μ の大きさが大きく互いに可換な配位が発散を生じうるので，A_μ の大きさを分離して考える．

$$A_\mu = Rx_\mu, \tag{F.2}$$

$$\mathrm{Tr}(x_\mu x_\mu) = 1 \tag{F.3}$$

のように A_μ の大きさを R とする．このもとで，(F.1) は

$$Z_{d,G} = \int_0^\infty dRR^{dg-1}\mathcal{X}_{d,G}(R) \tag{F.4}$$

となる．g は $\mathcal{G}$ の次元であり，$\mathcal{X}_{d,G}(R)$ は

$$\mathcal{X}_{d,G}(R) = \int \prod_{\nu=1}^{d} dx_\nu \delta(1 - \mathrm{Tr}(x_\mu x_\mu)) \exp\left(-R^4 S_{\mathcal{G}}\right) \tag{F.5}$$

で定義され，

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{G}} &= -\mathrm{Tr}([x_\mu, x_\nu][x_\mu, x_\nu]) \\ &= \sum_{i,j} |[x_\mu, x_\nu]_{ij}|^2 \end{aligned} \tag{F.6}$$

である．$S_{\mathcal{G}}$ は半正定値であり，

参考文献

[1] S. H. Shenker, In “Brezin, E. (ed.), Wadia, S.R. (ed.): The large N expansion in quantum field theory and statistical physics” 809–819. and In “Cargese 1990, Proceedings, Random surfaces and quantum gravity” 191–200.

[2] J. Polchinski, Phys. Rev. D **50**, 6041 (1994) [hep-th/9407031].

[3] M. R. Douglas, JHEP **0305**, 046 (2003) [hep-th/0303194].

[4] H. Liu, G. W. Moore and N. Seiberg, JHEP **0206**, 045 (2002) [hep-th/0204168].

[5] H. Liu, G. W. Moore and N. Seiberg, JHEP **0210**, 031 (2002) [hep-th/0206182].

[6] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, Nucl. Phys. B **498**, 467 (1997) [hep-th/9612115].

[7] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker and L. Susskind, Phys. Rev. D **55**, 5112 (1997) [hep-th/9610043].

[8] R. Dijkgraaf, E. P. Verlinde and H. L. Verlinde, Nucl. Phys. B **500**, 43 (1997) [hep-th/9703030].

[9] F. David, Mod. Phys. Lett. A **3**, 1651 (1988).

[10] J. Distler and H. Kawai, Nucl. Phys. B **321**, 509 (1989).

[11] H. Kawai, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **26**, 93 (1992).

[12] E. Brezin and V. A. Kazakov, Phys. Lett. B **236**, 144 (1990).

[13] M. R. Douglas and S. H. Shenker, Nucl. Phys. B **335**, 635 (1990).

[14] D. J. Gross and A. A. Migdal, Phys. Rev. Lett. **64**, 127 (1990); Nucl. Phys. B **340**, 333 (1990).

[15] M. Hanada, M. Hayakawa, N. Ishibashi, H. Kawai, T. Kuroki, Y. Matsuo and T. Tada, Prog. Theor. Phys. **112**, 131 (2004) [hep-th/0405076].

[16] F. David, Nucl. Phys. B **348**, 507 (1991).

[17] F. David, Phys. Lett. B **302**, 403 (1993) [hep-th/9212106].

[18] A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov, hep-th/0101152.

[19] S. Y. Alexandrov, V. A. Kazakov and D. Kutasov, JHEP **0309**, 057 (2003) [hep-th/0306177].

[20] T. Tada, Phys. Lett. B **259**, 442 (1991).

[21] M. R. Douglas, In “Cargese 1990, Proceedings, Random surfaces and quantum gravity” 77–83.

[22] V. Fateev, A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov, hep-th/0001012.

[23] J. Teschner, hep-th/0009138.

[24] T. Eguchi and H. Kawai, Phys. Rev. Lett. **48**, 1063 (1982).

[25] G. Bhanot, U. M. Heller and H. Neuberger, Phys. Lett. B **113**, 47 (1982).

[26] G. Parisi, Phys. Lett. B **112**, 463 (1982).

[27] D. J. Gross and Y. Kitazawa, Nucl. Phys. B **206**, 440 (1982).

[28] S. R. Das and S. R. Wadia, Phys. Lett. B **117**, 228 (1982) [Erratum-ibid. B **121**, 456 (1983)].

[29] B. Bringoltz and S. R. Sharpe, Phys. Rev. D **80**, 065031 (2009) [arXiv:0906.3538 [hep-lat]].

[30] T. Azeyanagi, M. Hanada, M. Unsal and R. Yacoby, Phys. Rev. D **82**, 125013 (2010) [arXiv:1006.0717 [hep-th]].

[31] A. Gonzalez-Arroyo and M. Okawa, Phys. Rev. D **27**, 2397 (1983).

[32] A. Gonzalez-Arroyo and M. Okawa, JHEP **1007**, 043 (2010) [arXiv:1005.1981 [hep-th]].

[33] A. Gonzalez-Arroyo and M. Okawa, Phys. Lett. B **718**, 1524 (2013) [arXiv:1206.0049 [hep-th]].

[34] H. Kawai, S. Shimasaki and A. Tsuchiya, Int. J. Mod. Phys. A **25**, 3389 (2010) [arXiv:0912.1456 [hep-th]].

[35] H. Kawai, S. Shimasaki and A. Tsuchiya, Phys. Rev. D **81**, 085019 (2010) [arXiv:1002.2308 [hep-th]].

[36] T. Ishii, G. Ishiki, S. Shimasaki and A. Tsuchiya, Phys. Rev. D **78**, 106001 (2008) [arXiv:0807.2352 [hep-th]].

[37] J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998) [hep-th/9711200].

[38] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, Phys. Lett. B **428**, 105 (1998) [hep-th/9802109].

[39] E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 253 (1998) [hep-th/9802150].

[40] J. W. Elliott, J. Giedt and G. D. Moore, Phys. Rev. D **78**, 081701 (2008) [arXiv:0806.0013 [hep-lat]].

[41] M. Hanada, S. Matsuura and F. Sugino, Prog. Theor. Phys. **126**, 597 (2011) [arXiv:1004.5513 [hep-lat]].

[42] M. Hanada, JHEP **1011**, 112 (2010) [arXiv:1009.0901 [hep-lat]].

[43] S. Catterall, J. Giedt and A. Joseph, JHEP **1310**, 166 (2013) [arXiv:1306.3891 [hep-lat]].

[44] N. Kim, T. Klose and J. Plefka, Nucl. Phys. B **671**, 359 (2003) [hep-th/0306054].

[45] H. Lin and J. M. Maldacena, Phys. Rev. D **74**, 084014 (2006) [hep-th/0509235].

[46] D. E. Berenstein, J. M. Maldacena and H. S. Nastase, JHEP **0204**, 013 (2002) [hep-th/0202021].

[47] K. Dasgupta, M. M. Sheikh-Jabbari and M. Van Raamsdonk, JHEP **0205**, 056 (2002) [hep-th/0205185].

[48] E. Witten, Nucl. Phys. B **460**, 335 (1996) [hep-th/9510135].

[49] W. Taylor, Phys. Lett. B **394**, 283 (1997) [hep-th/9611042].

[50] D. B. Kaplan, E. Katz and M. Unsal, JHEP **0305**, 037 (2003) [hep-lat/0206019].

[51] A. G. Cohen, D. B. Kaplan, E. Katz and M. Unsal, JHEP **0308**, 024 (2003) [hep-lat/0302017].
[52] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, Rev. Mod. Phys. **73**, 977 (2001) [hep-th/0106048].
[53] H. Aoki, N. Ishibashi, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa and T. Tada, Nucl. Phys. B **565**, 176 (2000) [hep-th/9908141].
[54] N. Ishibashi, S. Iso, H. Kawai and Y. Kitazawa, Nucl. Phys. B **573**, 573 (2000) [hep-th/9910004].
[55] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk and N. Seiberg, JHEP **0002**, 020 (2000) [hep-th/9912072].
[56] T. Filk, Phys. Lett. B **376**, 53 (1996).
[57] J. Madore, Class. Quant. Grav. **9**, 69 (1992).
[58] J. Hoppe, Int. J. Mod. Phys. A **4**, 5235 (1989).
[59] H. Grosse, C. Klimcik and P. Presnajder, Commun. Math. Phys. **178**, 507 (1996) [hep-th/9510083].
[60] S. Baez, A. P. Balachandran, B. Ydri and S. Vaidya, Commun. Math. Phys. **208**, 787 (2000) [hep-th/9811169].
[61] G. Ishiki, S. Shimasaki, Y. Takayama and A. Tsuchiya, JHEP **0611**, 089 (2006) [hep-th/0610038].
[62] T. Ishii, G. Ishiki, S. Shimasaki and A. Tsuchiya, Phys. Rev. D **77**, 126015 (2008) [arXiv:0802.2782 [hep-th]].
[63] D. Varshalovich, A. Moskalev and V. Khersonskii, *Quantum Theory of Angular Momentum* (World Scientific, Singapore, 1988).
[64] S. Iso, Y. Kimura, K. Tanaka and K. Wakatsuki, Nucl. Phys. B **604**, 121 (2001) [hep-th/0101102].
[65] H. Aoki, S. Iso and K. Nagao, Nucl. Phys. B **684**, 162 (2004) [hep-th/0312199].
[66] M. Teper and H. Vairinhos, Phys. Lett. B **652**, 359 (2007) [hep-th/0612097].
[67] T. Azeyanagi, M. Hanada, T. Hirata and T. Ishikawa, JHEP **0801**, 025 (2008) [arXiv:0711.1925 [hep-lat]].
[68] J. Ambjorn, Y. M. Makeenko, J. Nishimura and R. J. Szabo, JHEP **0005**, 023 (2000) [hep-th/0004147].
[69] A. Schild, Phys. Rev. D **16**, 1722 (1977).
[70] E. G. Floratos and J. Iliopoulos, Phys. Lett. B **201**, 237 (1988).
[71] D. B. Fairlie, P. Fletcher and C. K. Zachos, Phys. Lett. B **218**, 203 (1989).
[72] D. B. Fairlie and C. K. Zachos, Phys. Lett. B **224**, 101 (1989).
[73] E. G. Floratos, Phys. Lett. B **228**, 335 (1989).
[74] C. N. Pope and L. J. Romans, Class. Quant. Grav. **7**, 97 (1990).
[75] H. Itoyama and A. Tokura, Phys. Rev. D **58**, 026002 (1998) [hep-th/9801084].
[76] M. Fukuma, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, Nucl. Phys. B **510**, 158 (1998)

[hep-th/9705128].
[77] M. B. Green, J. H. Schwarz and L. Brink, Nucl. Phys. B **219**, 437 (1983).
[78] H. Itoyama and A. Tokura, Prog. Theor. Phys. **99**, 129 (1998) [hep-th/9708123].
[79] M. Hanada, H. Kawai and Y. Kimura, Prog. Theor. Phys. **114**, 1295 (2006) [hep-th/0508211].
[80] H. Steinacker, Class. Quant. Grav. **27**, 133001 (2010) [arXiv:1003.4134 [hep-th]].
[81] H. S. Yang, JHEP **0905**, 012 (2009) [arXiv:0809.4728 [hep-th]].
[82] Y. Asano, H. Kawai and A. Tsuchiya, Int. J. Mod. Phys. A **27**, 1250089 (2012) [arXiv:1205.1468 [hep-th]].
[83] W. Krauth, H. Nicolai and M. Staudacher, Phys. Lett. B **431**, 31 (1998) [hep-th/9803117].
[84] P. Austing and J. F. Wheater, JHEP **0102**, 028 (2001) [hep-th/0101071].
[85] P. Austing and J. F. Wheater, JHEP **0104**, 019 (2001) [hep-th/0103159].
[86] J. Ambjorn, K. N. Anagnostopoulos, W. Bietenholz, T. Hotta and J. Nishimura, JHEP **0007**, 013 (2000) [hep-th/0003208].
[87] K. N. Anagnostopoulos, T. Azuma and J. Nishimura, JHEP **1311**, 009 (2013) [arXiv:1306.6135 [hep-th]].
[88] H. Aoki, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa and T. Tada, Prog. Theor. Phys. **99**, 713 (1998) [hep-th/9802085].
[89] J. Nishimura and G. Vernizzi, JHEP **0004**, 015 (2000) [hep-th/0003223].
[90] J. Nishimura and F. Sugino, JHEP **0205**, 001 (2002) [hep-th/0111102].
[91] H. Kawai, S. Kawamoto, T. Kuroki, T. Matsuo and S. Shinohara, Nucl. Phys. B **647**, 153 (2002) [hep-th/0204240].
[92] H. Kawai, S. Kawamoto, T. Kuroki and S. Shinohara, Prog. Theor. Phys. **109**, 115 (2003) [hep-th/0211272].
[93] T. Aoyama, H. Kawai and Y. Shibusa, Prog. Theor. Phys. **115**, 1179 (2006) [hep-th/0602244].
[94] J. Nishimura, T. Okubo and F. Sugino, JHEP **1110**, 135 (2011) [arXiv:1108.1293 [hep-th]].
[95] T. Imai, Y. Kitazawa, Y. Takayama and D. Tomino, Nucl. Phys. B **665**, 520 (2003) [hep-th/0303120].
[96] T. Imai, Y. Kitazawa, Y. Takayama and D. Tomino, Nucl. Phys. B **679**, 143 (2004) [hep-th/0307007].
[97] T. Imai and Y. Takayama, Nucl. Phys. B **686**, 248 (2004) [hep-th/0312241].
[98] G. W. Moore, N. Nekrasov and S. Shatashvili, Commun. Math. Phys. **209**, 77 (2000) [hep-th/9803265].
[99] S. -W. Kim, J. Nishimura and A. Tsuchiya, Phys. Rev. Lett. **108**, 011601 (2012) [arXiv:1108.1540 [hep-th]].
[100] T. Yoneya, Prog. Theor. Phys. **97**, 949 (1997) [hep-th/9703078].

[101] S. -W. Kim, J. Nishimura and A. Tsuchiya, JHEP **1210**, 147 (2012) [arXiv:1208.0711 [hep-th]].

[102] H. Aoki, S. Iso and T. Suyama, Nucl. Phys. B **634**, 71 (2002) [hep-th/0203277].

[103] A. Chatzistavrakidis, H. Steinacker and G. Zoupanos, JHEP **1005**, 100 (2010) [arXiv:1002.2606 [hep-th]].

[104] H. Aoki, Prog. Theor. Phys. **125**, 521 (2011) [arXiv:1011.1015 [hep-th]].

[105] A. Chatzistavrakidis, H. Steinacker and G. Zoupanos, JHEP **1109**, 115 (2011) [arXiv:1107.0265 [hep-th]].

[106] J. Nishimura and A. Tsuchiya, JHEP **1312**, 002 (2013) [arXiv:1305.5547 [hep-th]].

[107] O. Alvarez, Nucl. Phys. B **216**, 125 (1983).

[108] E. D'Hoker and D. H. Phong, Rev. Mod. Phys. **60**, 917 (1988).

[109] T. Hotta, J. Nishimura and A. Tsuchiya, Nucl. Phys. B **545**, 543 (1999) [hep-th/9811220].

索　引

欧字

ア

カ

サ

著者略歴

土屋 麻人
つちや　あさと

1995年　東京大学大学院理学系研究科物理学専攻博士課程修了
　　　　博士（理学）（東京大学，1995年）
　　　　大阪大学大学院理学研究科助教などを経て，
現　在　静岡大学理学部教授
専　門　素粒子論

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ-104
『弦理論と行列模型
　弦理論の非摂動的定式化と新しい時空と物質の捉え方』（電子版）

著　者　土屋 麻人

2023年3月10日　初版発行　ISBN 978-4-7819-9998-2
この電子書籍は2014年3月10日初版発行の同タイトルを底本としています．

数理科学編集部　　　発行人　森 平 敏 孝
TEL.(03)5474-8816
FAX.(03)5474-8817

ホームページ　https://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp まで．

発行所　© 株式会社 サイエンス社　　TEL.(03)5474-8500 (代表)
〒151-0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1-3-25

組版　ゼロメガ