

特集 / 位相的 K 理論をめぐって

巻頭言

松尾 信一郎

K 理論は現代幾何に遍在する。線型代数のほんの一步先から現代幾何の最先端へ連続と続く道でもある。さらにその道は現代物理とも交錯する。まさに壮大な理論体系である。しかし、 K 理論を、そこにそびえる山頂として仰ぎ見るだけではもったいない。山頂への一步を踏み出したときの道標となるべく本特集は編まれた。

早速、 K 理論を紹介しながら、本特集の各記事を概観したい。 K 理論とは、標語的に言えば、線型代数を族で考えることで得られるトポロジーのものの見方の一つであって、ベクトル束の安定同値類から構成される一般コホモロジー理論である。Bott 周期性を大きな特徴として、Adams 作用素という強力なコホモロジー作用素を持ち、Chern 指標によって普通のコホモロジー理論と結びつく。岸本大祐氏の記事では、ベクトル束の定義から始まりトポロジーへの古典的应用までが最短ルートで解説されている。応用としては、球面上の複素構造の存在問題と Hopf 不変量の問題が扱われる。前者の問題は、トポロジーに典型的な整数性の応用であり、Bott 周期性と Chern 指標が用いられる。後者の問題は、元々は、普通のコホモロジー理論の高次コホモロジー作用素を駆使した議論により示されていたのだが、 K 理論では Adams 作用素を用いることで『ポストカードに書けるような (Atiyah の表現)』簡潔な証明になった。

この簡潔な証明の背後のからくりを枕として、玉木大氏の記事では K 理論が現代的なホモトピー論の観点から腑分けされていく。 K 理論は v_1 周

期的であり、 v_0 周期的である有理コホモロジー理論の次の階層にある。さらに次の階層には楕円コホモロジー理論や位相的モジュラー形式などがある。 K 理論は v_n 周期性に基づく現代の安定ホモトピー論における試金石となっている。

ところで、 K 理論にはいくつかの等価な定式化がある。岸本氏の記事では、ベクトル束の同型類の集合から Grothendieck 構成によって K 群が導入された。五味清紀氏の記事では、Karoubi による構成が解説される。Atiyah–Bott–Shapiro は、Clifford 代数の周期性と K 群の周期性との関係を看破したが、その結びつきは間接的なものに留まっていた。Karoubi による定式化は両者の周期性の直接的な関係をあからさまに与えるものである。さらに、古田幹雄氏の記事では、無限次元の対象をも取り込んで K 群を構成することで、自然に指数の概念に導かれることを、Dirac 作用素の離散近似という問題を通して解説している。また、 K 理論と指数の緊密な関係は、Bott 周期性の証明を通して、松尾の記事でも解説される。ここから Atiyah–Singer の指数定理まではすぐそこである。

K 理論は線型代数を族で考えたものであるが、群の表現を族で考えたものが同変 K 理論である。今野北斗氏の記事では、四次元トポロジーにおける Seiberg–Witten 理論を切り口として、同変 K 理論を解説している。現代幾何の最先端で K 理論が使われている様子がまざまざと見られるだろう。

また、 K 理論はトポロジーのものの見方の一つ

であるが、トポロジ的な情報しか持っていないとも言える。微分 K 理論とは、微分幾何的な情報も組み込むことで K 理論を精密化したものであって、山下真由子氏の記事で解説される。例えば、指数が K 理論と緊密な関係を持つように、エータ不変量は微分 K 理論と結びつく。微分 K 理論は最近活発に研究されているが、今まで適切な入門記事がなかった。待望の解説である。

さらに、 K 理論は現代物理でも日常の道具となりつつある。五味氏と古田氏と山下氏の記事でも物理との関連は言及されているが、塩崎謙氏の記事では、物性物理学におけるトポロジカル絶縁体の分類問題が、いかにして K 理論によって定式化されるかが解説され、 K 群を計算するための主要な道具である Atiyah–Hirzebruch スペクトル系列の物理的解釈も与えられる。

さて、 K 理論の歴史は次のようなものだ。まずは前史として、1956年に Bott が Morse 理論の応用としてユニタリ群や直交群のホモトピー群の周期性を証明し、1957年に Grothendieck が Hirzebruch–Riemann–Roch の定理を一般化するために連接層の K 群を導入した。1959年に Atiyah と Hirzebruch が、Bott 周期性を用いて、Grothendieck の K 群を一般コホモロジー理論として翻案した。1962年に Adams が K 理論を用いて球面上のベクトル場の問題を解決し、1963年には Atiyah と Singer が指数定理の K 理論的証明を発表した。さらに、1964年には、Atiyah と Bott が周期性定理の初等的証明を発表し、Atiyah の有名な教科書の基となった講義も行われた。ちなみに、 K 理論の K は類 (class) を表すドイツ語の Klasse に由来し、Grothendieck が命名した。Grothendieck の 1985年2月9日の手紙⁹⁾によれば、最初は class の頭文字を用いて $C(X)$ としようとしたが、函数解析を研究していた経験があるので $C(X)$ では連続函数の空間と紛らわしいと気付いて、母国語のドイツ語を用いて $K(X)$ としたらしい。 K 理論の歴史については、Atiyah 全集第二巻³⁾の冒頭の本人註解と Segal による Atiyah の追悼記事⁷⁾と Dieudonné の本⁶⁾がある。

K 理論の教科書としては、ここでは、Atiyah によるもの²⁾と Hirzebruch によるもの¹⁾と Bott によるもの⁵⁾だけを挙げておく。創始者の三者三様の視点が大変興味深い。また、雑誌「数学」の概説記事^{8,9)}はよくまとまっており、本特集と相補的である。そして、青木匠門氏と森田陽介氏の記事では、 K 理論の勉強法について、物理と数学のそれぞれの立場から、実践的に解説される。

最後に、本特集で解説されなかったことを説明しておく。作用素環の K 理論と代数的 K 理論は、別の特集で系統的に扱われるべきと考え、本特集には含めなかった。ただ、 KK 理論や K -ホモロジーの解説は本特集にもあってもよかったかもしれない。 KO 理論はほとんど扱えなかった。現代物理への応用では、D ブレインについては扱えなかった。他に扱いたかったことには、捻れ K 理論と KR 理論と Atiyah–Singer の指数定理がある。

参考文献

- 1) F. Hirzebruch. Lectures on K -theory. In *Algebraic topology – a student's guide*. pp.223–238, Vol.4 of London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, London-New York, 1972.
- 2) M.F. アティヤ 著, 松尾信一郎 監訳, 川辺治之 訳. 『 K 理論』. 岩波書店, 2022.
- 3) M.F. Atiyah. *Michael Atiyah Collected works*. Vol.2, K -theory. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1988.
- 4) A. Bak. Editorial. *K-Theory*, Vol.1, No.1, pp.1–4, 1987.
- 5) R. Bott. *Lectures on $K(X)$* . Mathematics Lecture Note Series. W.A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.
- 6) J. Dieudonné. *A history of algebraic and differential topology 1900–1960*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Ltd., Boston, MA, 2009. Reprint of the 1989 edition [MR0995842].
- 7) G. Segal. Michael Atiyah's work in algebraic topology. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, Vol.58, No.4, pp.481–516, 2021.
- 8) 荒木捷朗. 位相的 K -理論 I. 「数学」, Vol.22, No.1, pp.60–76, 1970.
- 9) 荒木捷朗. 位相的 K -理論 II. 「数学」, Vol.23, No.4, pp.272–292, 1971.

(まつお・しんいちろう, 名古屋大学大学院多元数理科学研究科)