September 2025　　MATHEMATICAL SCIENCES　　Number 747

特集／多彩な拡がりをもつ《層》の魅力

巻頭言

戸 田　幸 伸

私が層について初めて学んだのは，大学生のときに代数幾何学の基礎理論を勉強していた際である．代数幾何学の有名な教科書である『Algebraic Geometry（Hartshorne 著，Springer)』の Chapter II は，層の定義から始まる．Chapter I では具体的な代数多様体の話が展開されていたが，Chapter II では一転して抽象的な議論が始まり，当時の私は戸惑いを覚えた記憶がある．実際，層について学び始めた当初は前層の層化の重要性について誤解しており，層の理論を正しく理解するまでに時間を要した記憶がある．

層とは大まかにいえば，空間上の「各開集合上の関数のようなもの（切断)」と，それらの貼り合わせデータからなる概念である．層は，局所と大域を結びつける概念であるといえる．局所と大域というのは数学における根本的なキーワードであるため，層の具体例は非常に豊富である．一方で，層の定義は抽象的かつ一見人工的にも見えるものであり，その基礎理論を正しく理解することは学び始めの段階では難解であると思われる．具体例は豊富なので，理解に行き詰まった読者は様々な具体例に触れて層に慣れるのがよいのではないかと思う．層の厳密な定義や歴史については，平野氏の記事を参照されたい．

ところで一口に層といっても，切断の集合に様々な構造を与えることができ，それに応じて層の持つ性質や役割が変わってくる．通常は，切断の集合がアーベル群をなすものを考えるが，可換環（あるいは非可換環）からなる層や，その上の加群の層を考えることもできる．これにより，層に関する多様な理論が展開される．

可換環の層や，その上の加群の層である連接層の概念は，代数幾何学および複素幾何学において特に重要である．例えば，各開集合上の切断として（代数的あるいは正則）関数のなす集合を考えると，構造層と呼ばれる可換環の層が得られる．連接層とは，ある種の有限性条件を満たす加群の層であり，代数幾何学や複素幾何学の枠組みにおいては，（代数的あるいは正則）ベクトル束のある種の一般化とみなされる（実際にはベクトル束とみなせない部分も含まれるため，「特異点付きベクトル束」と呼ばれることもある)．連接層を用いることで，ベクトル束の安定性を定義することが可能となる．代数幾何学においては安定性はベクトル束のモジュライ空間の構成に利用され，また複素幾何学においては多重安定ベクトル束と Hermite–Einstein 計量を持つベクトル束が Kobayashi–Hitchin 対応によって関連付けられる．代数幾何学における連接層については大内氏の記事，複素幾何学における連接層については松村氏の記事を参照されたい．

一方，代数解析学においては，微分作用素のなす非可換環の層を考える．その上の加群の層は D-加群と呼ばれ，線形偏微分方程式をホモロジー代数の枠組みで扱う手法として発展してきた．D-加群は加群の層であるが，解空間の層を考えると，それは構成可能層となる．構成可能層は，局所定